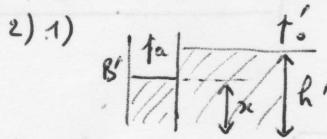
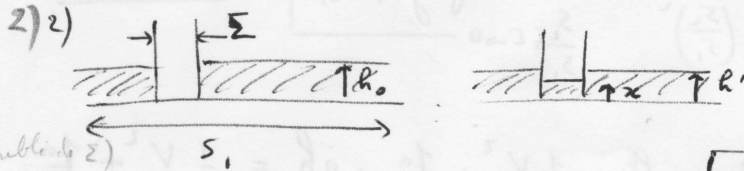


$$p_B - p_0 = \rho g h_0$$



$$\left. \begin{aligned} p_B - p'_0 &= \rho g (h' - x) \\ p_a &= p_a \end{aligned} \right\} \Rightarrow p_a - p'_0 = \rho g (h' - x)$$



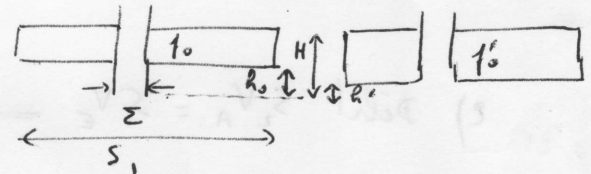
$$\Sigma x = (S_1 - \Sigma) (h_0 - h')$$

Diviser par S_1 , avec $\varepsilon = \frac{\Sigma}{S_1}$: $\left[\varepsilon x = (1 - \varepsilon) (h_0 - h') \right] \Rightarrow h_0 - h' = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} x$

Orde 1 $\Rightarrow h_0 - h' = \varepsilon x$

2) 3) Loi des GP à T constante : $pV = \text{cte}$

$$p_0 (H - h_0) = p'_0 (H - h')$$



2) 4) . utiliser 2.2) et 2.3) : $p_0 (H - h_0) = p'_0 (H + \varepsilon x - h_0)$

calculs : d.l. ache 1 $\left[p'_0 = p_0 \frac{H - h_0}{H - h_0 + \varepsilon x} = p_0 \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon x}{H - h_0}} \stackrel{\text{d.l.}}{\approx} p_0 \left(1 - \frac{\varepsilon x}{H - h_0} \right) \right] \text{ (OK)}$

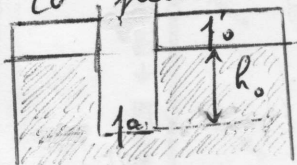
. utiliser 2.1 et 2.2 càd : $p_a - p'_0 = \rho g (h' - x)$
 $h_0 - h' = \varepsilon x$

$$\Rightarrow p'_0 = p_a - \rho g (h_0 - \varepsilon x - x)$$

2) 5) . utiliser les 2 formules du 2.4) et éliminer p'_0

$$\Rightarrow x = \frac{p_0 - p_a + \rho g h_0}{\varepsilon \rho g + \rho g + \frac{p_0 \varepsilon}{H - h_0}} = \frac{p_0 - p_a + \rho g h_0}{\rho g (1 + \varepsilon (1 + \frac{p_0}{(H - h_0) \rho g}))} \approx \frac{p_0 - p_a + \rho g h_0}{\rho g} (1 - \varepsilon (1 + \frac{p_0}{(H - h_0) \rho g}))$$

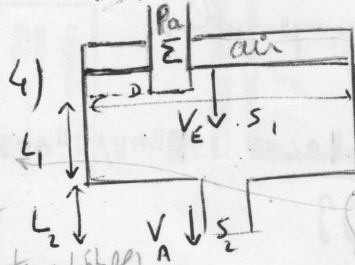
I₃) Si $p_a > p_B$ le liquide devrait descendre dans le tube de section Σ mais cela est rendu impossible par la présence de liquide dans la hauteur h_0 .
 Le liquide reste obligatoirement en place (comme piégé)
 La pression en B est par continuité p_a : $p_B = p_a$ $x = 0$



$$p_a - p'_0 = \rho g h_0$$

$$p'_0 = p_a - \rho g h_0$$

la pression du fluide emprisonné p'
 Comme son volume est resté le même sa p' doit alors $\uparrow$.



. Egalité des débits $\Rightarrow V_E (S_1 - \Sigma) = V_A S_2$ (1)

. Bernoulli entre D et A : $\frac{1}{2} V_D^2 + g(L_1 + L_2) + \frac{p_a}{\rho} = \frac{1}{2} V_A^2 + 0 + \frac{p_a}{\rho}$

$$\Rightarrow V_D^2 = V_A^2 - 2g(L_1 + L_2) \quad (2)$$

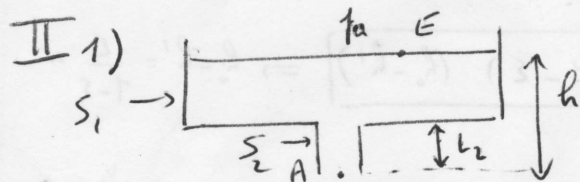
rig. "permanent"
 fluide "parfait"
 "incompressible"

$$V_D = V_E \xrightarrow{(1)} V_D = V_A \frac{S_2}{S_1 - \Sigma} \stackrel{\text{d.p.}}{=} V_A \frac{S_2}{S_1} (1 + \varepsilon) \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow V_A^2 \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 (1 + 2\varepsilon) = V_A^2 - 2g(L_1 + L_2) \Rightarrow V_A = \sqrt{\frac{2g(L_1 + L_2)}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 (1 + 2\varepsilon)}}$$

$$\left[f_1 = \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right] \quad \left[f_2(\varepsilon) = 1 + 2\varepsilon \right]$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad V_A \rightarrow \sqrt{\frac{2g(L_1 + L_2)}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2}} \xrightarrow{\frac{S_2}{S_1} \rightarrow 0} \sqrt{2g(L_1 + L_2)} \quad \text{Torricelli}$$



$$\text{Bernoulli} \quad \frac{1}{2} V_E^2 + \frac{p_a}{\rho} + gh = \frac{1}{2} V_A^2 + \frac{p_a}{\rho}$$

$$\Rightarrow V_A^2 = V_E^2 + 2gh$$

$$2) \text{ Débit } S_2 V_A = S_1 V_E \Rightarrow \left| \frac{V_E}{V_A} = \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 \right|$$

$$\text{on veut } \frac{V_E}{V_A} < 0,01 \quad \text{d'où} \quad \underline{D_2 < 0,1 D_1}$$

$$\text{Après } V_A^2 \approx 2gh \quad \underline{V_A \approx \sqrt{2gh}}$$

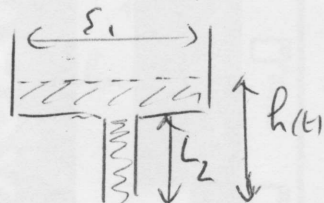
$$3) V_E = -\frac{dh}{dt}$$

$$f II_2) V_E = V_A \frac{S_2}{S_1} = \sqrt{2gh} \frac{S_2}{S_1} \quad \Rightarrow \quad \left[-\frac{dh}{dt} = \sqrt{2gh} \frac{S_2}{S_1} \right]$$

$$4) \text{ Résolution équ. diff de 3) } \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g} \frac{S_2}{S_1} dt \Rightarrow \sqrt{h} - \sqrt{h_0} = -\frac{S_2}{S_1} \sqrt{\frac{g}{2}} t$$

$$\Rightarrow \left[h = h_0 \left(1 - \sqrt{\frac{g}{2h_0}} \frac{S_2}{S_1} t \right)^2 \right] \text{ mais aussi } \left[t = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{S_1}{S_2} (\sqrt{h_0} - \sqrt{h}) \right]$$

Vider le volume τ , (récepteur de surface S_1) correspond à $h = L_2$



$$\text{d'où } \tau_1 = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{S_1}{S_2} (\sqrt{h_0} - \sqrt{L_2})$$

$$\text{AN: } \tau_1 = \sqrt{\frac{2}{9,81}} \cdot 100 (\sqrt{2} - \sqrt{1}) = 18,7 \text{ s}$$

$$v_A(t=0) = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2 \times 9,802} = 6,26 \text{ m.s}^{-1}$$

$$v_A(t=t_1) = \sqrt{2gL_2} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 1} = 4,43 \text{ m.s}^{-1}$$

III.1) Irrrotationnel : $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ Euler $\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} \frac{1}{2} v^2 + 0 = -\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p - \vec{\text{grad}}(gz)$
 * par ρ : $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{\text{grad}} \frac{1}{2} v^2 = -\vec{\text{grad}} p - \vec{\text{grad}}(\rho g z)$ (ρ constant) (3)

* par $\vec{v}$: $\rho \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} \frac{1}{2} \rho v^2 = -\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} p - \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}(\rho g z)$

$$\rho \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z \right) = 0$$

$$\left[\rho \frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}(\rho g H) = 0 \right] \text{ avec } H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z$$

III.2). math : $\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} f = \text{div}(f \vec{v}) - f \text{div} \vec{v}$ (cf 1^{ère} ligne énoncé)
 incompressible : $\text{div} \vec{v} = 0$

appliquer à $f = \rho g H$: $\rho \frac{\partial v^2}{\partial t} + \text{div}(\rho g H \vec{v}) = 0$

intégrer sur τ : $\iiint_{\tau} \frac{1}{2} \rho \frac{\partial v^2}{\partial t} d\tau + \iiint_{\tau} \text{div}(\rho g H \vec{v}) d\tau = 0$

Ostrogradski

$$\underbrace{\iiint_{\tau}}_{I_2} + \underbrace{\iint_{\Sigma} \rho g H \vec{v} \cdot \vec{n} d\Sigma}_{I_1} = 0$$