e3a MP 04 N/13,75

1.a) Eq de diffusion $\boxed{\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{K}{\rho c}\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$

0,25

1.b) Stationnaire : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0 \rightarrow \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

0,25 donc $\boxed{T_a(z) = Az + B}$

1.c) La paroi adiabatique impose

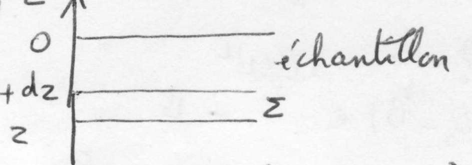
0,5 $\boxed{j(z=L) = 0}$ càd d'après la loi

de Fourier $\left(\dfrac{\partial T_a}{\partial z}\right)_{z=L} = 0$ d'où $A = 0$

0,25

0,25 d'où $T_a = B$ uniforme

2.a)



0,25 L'onde va dans le sens $z \searrow$ donc $\boxed{I \searrow}$

L'entrée de Σ est $z+dz$, sa sortie z

donc $P_{\text{reçu par } \Sigma} = \left(I_{(z+dz)} - I_{(z)}\right)S$

$P_{\text{reçu par } \Sigma} = I_0 S\left(e^{\alpha(z+dz)} - e^{\alpha z}\right)$

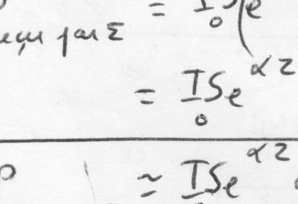
$= I_0 S e^{\alpha z}\left(e^{\alpha dz} - 1\right)$

1

$\boxed{P_{\text{reçu par } \Sigma} \simeq I_0 S e^{\alpha z} \alpha\, dz}$

0,5 La durée d'échange d'énergie entre l'onde et le milieu est certainement plus petite que la durée de diffusion thermique : c'est pourquoi on peut moyenner la puissance fournie par l'onde au milieu.

2.b) On part d'un bilan thermique à pression constante sur $\Sigma\,[z\,;\,z+dz]$



$dH = \delta Q$ pendant dt

$\boxed{\rho_e c_e S\, dz\, dT_e = j_{(z)} S dt - j_{(z+dz)} S dt + P_{\text{reçu}} dt}$

$\rho_e c_e S\, dz \dfrac{\partial T_e}{\partial t} dt = -\dfrac{\partial j}{\partial z} S\, dz\, dt + P_{\text{reçu}}\, dt$

Loi de Fourier $j = -K_e \dfrac{\partial T_e}{\partial z}$

d'où $\rho_e c_e S\, dz \dfrac{\partial T_e}{\partial t} = K_e S \dfrac{\partial^2 T_e}{\partial z^2} dz + I_0 S e^{\alpha z} \alpha\, dz$

d'où $\rho_e c_e \dfrac{\partial T_e}{\partial t} = K_e \dfrac{\partial^2 T_e}{\partial z^2} + I_0 e^{\alpha z} \alpha$

enfin $\dfrac{\partial T_e}{\partial t} = \dfrac{K_e}{\rho_e c_e}\dfrac{\partial^2 T_e}{\partial z^2} + \dfrac{\alpha I_0 e^{\alpha z}}{\rho_e c_e}$

1,75

$\boxed{\dfrac{\partial T_e}{\partial t} = \dfrac{K_e}{\rho_e c_e}\left[\dfrac{\partial^2 T_e}{\partial z^2} + \dfrac{\alpha I_0 e^{\alpha z}}{K_e}\right] = D_e\left[\dfrac{\partial^2 T_e}{\partial z^2} + \beta e^{\alpha z}\right]}$ avec $\boxed{D_e = \dfrac{K_e}{\rho_e c_e} \quad \beta = \dfrac{\alpha I_0}{K_e}}$

$\boxed{\beta > 0}$

2.c) Stationnaire $\Rightarrow \dfrac{\partial T_e}{\partial t} = 0$

donc $\dfrac{d^2 T_e}{dz^2} = -\dfrac{\alpha I_0}{K_e} e^{\alpha z}$

Intégrer $\dfrac{dT_e}{dz} = -\dfrac{\alpha I_0}{K_e}\dfrac{e^{\alpha z}}{\alpha} + A$

Intégrer $\boxed{T_e = -\dfrac{I_0}{K_e \alpha} e^{\alpha z} + Az + B}$ 0,75

0,25

3.a) Continuité de $t°$ en $z = -L_e$: $\boxed{T_{e(-L_e)} = T_0}$

En $z = 0$ on ne connaît pas la température au contact de l'air. Il est donc inutile d'écrire la continuité de $t°$ en $z = 0$.

En revanche on sait qu'en régime stationnaire la $t°$ dans l'air T_a est uniforme

donc $\dfrac{dT_a}{dz} = 0 \quad \forall\, z \geq 0$

Or le flux thermique est continu, càd $j(z=0^-) = j(z=0^+)$ soit $-K_e\left(\dfrac{\partial T_e}{\partial z}\right)_{z=0} = -K_a\left(\dfrac{\partial T_a}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$

donc $\boxed{\left(\dfrac{\partial T_e}{\partial z}\right)_{z=0} = 0}$

$T_{e(-L_e)} = T_0$ donne $T_0 = -\dfrac{I_0}{K_e \alpha} e^{-\alpha L_e} - AL_e + B$

$\left(\dfrac{\partial T_e}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$ donne $0 = -\dfrac{I_0}{K_e} + A$

d'où $A = \dfrac{I_0}{K_e}$ et $B = T_0 + \dfrac{I_0 L_e}{K_e} + \dfrac{I_0}{K_e \alpha} e^{-\alpha L_e}$

$\boxed{T_{e_s} = -\dfrac{I_0}{K_e \alpha} e^{\alpha z} + \dfrac{I_0}{K_e} z + T_0 + \dfrac{I_0 L_e}{K_e} + \dfrac{I_0}{K_e \alpha} e^{-\alpha L_e}}$ 0,75

3.b) La puissance évacuée (donc vers $z \searrow$) en $z = -L_e$ est $P_{th} = -j(-L_e)S$

$$j(-L_e) = -K_e\left(\frac{\partial T_e}{\partial z}\right)_{-L_e} = -K_e \frac{I_0}{K_e}$$ (en fait indépendant de z)

$$T_e = \frac{I_0}{K_e}(z + L_e) + T_0$$

0,5 $P_{th} = K_e \frac{I_0}{K_e} S$ soit $\boxed{P_{th} = I_0 S}$ évacuée

Etant donné qu'aucune énergie ne se crée ni ne se perd dans l'échantillon, P_{th} doit être aussi la puissance reçue en $z=0$. On reprend l'énoncé du 2 appliqué en $z=0$: $I_{(z=0)} = I_0$ ce qui fait la puissance $I_0 S$ reçue en $z=0$ par une surface S de l'échantillon.
(Cette puissance est petit à petit absorbée par l'échantillon, mais comme celui-ci est en régime stationnaire, sa température n'évolue plus, cette puissance absorbée doit donc être véhiculée vers l'extérieur et seule la base $z = -L_e$ est une paroi d'échange avec l'extérieur).

3.c) Pour avoir T_{as} (qui est uniforme) on peut appliquer la continuité de t° en $z=0$ puisqu'on connaît $T_{es}(z)$:

$$\boxed{T_{as} = T_{es}(z=0)} \Rightarrow \boxed{T_{as} = \frac{I_0 L_e}{K_e} + T_0}$$ 0,25

(hyp $\alpha L_e \gg 1$ permet de négliger $e^{-\alpha L_e}$ ou bien de prendre T_{es} de l'énoncé 3.a)

On constate que T_{as} est indépendant de α, donc il n'est pas possible d'accéder à α en régime stationnaire. 0,25

4.a Eq^n de diffusion $\frac{\partial T_a}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 T_a}{\partial z^2}$

on y injecte $T_a = T_{as} + g_a(z)e^{j\Omega t}$

$\rightarrow j\Omega\, g_a(z) = D_a\, g_a''(z)$

$\rightarrow g_a'' - j\frac{\Omega}{D_a} g_a = 0$

or $j = \left(\frac{1+j}{\sqrt{2}}\right)^2$ d'où $g_a'' - \left(\sqrt{\frac{\Omega}{2D_a}}(1+j)\right)^2 g_a = 0$

on a donc $\frac{d^2 g_a}{dz^2} - \left(\frac{1+j}{\delta_a}\right)^2 g_a = 0$ 0,75

avec $\boxed{\delta_a = \sqrt{\frac{2D_a}{\Omega}}}$

4.b. La paroi est adiabatique en $z = L$ donc $j(z=L) = 0$ soit $\left(\frac{\partial T_a}{\partial z}\right)_L = 0$

d'où $\left(\frac{\partial \theta_a}{\partial z}\right)_L = 0$ c.à.d $\boxed{\left(\frac{dg_a}{dz}\right)_L = 0}$ 0,5

Résolution : $g_a = A e^{\frac{1+j}{\delta_a}z} + B e^{-\frac{1+j}{\delta_a}z}$ 0,5

avec $g_a(0) = \theta_0 = A + B$ 0,25

et $\left(\frac{dg_a}{dz}\right)_L = 0 = \frac{1+j}{\delta_a}\left(A e^{\frac{1+j}{\delta_a}L} - B e^{-\frac{1+j}{\delta_a}L}\right)$

$\Rightarrow A = \theta_0 - B$

$0 = (\theta_0 - B)e^{\frac{2(1+j)L}{\delta_a}} - B$

$\Rightarrow B = \frac{\theta_0}{1 + e^{-\frac{2(1+j)L}{\delta_a}}}$ et $A = \frac{\theta_0}{1 + e^{\frac{2(1+j)L}{\delta_a}}}$

$$\boxed{g_a = \theta_0\left[\frac{e^{\frac{(1+j)z}{\delta_a}}}{1 + e^{\frac{2(1+j)L}{\delta_a}}} + \frac{e^{-\frac{(1+j)z}{\delta_a}}}{1 + e^{-\frac{2(1+j)L}{\delta_a}}}\right]}$$ 0,5

4.c. $L \gg \delta_a \Rightarrow e^{\frac{2(1+j)L}{\delta_a}} \rightarrow \infty$

$e^{-\frac{2(1+j)L}{\delta_a}} \rightarrow 0$

d'où $\boxed{g_a \simeq \theta_0 e^{-\frac{(1+j)z}{\delta_a}}}$ 0,5

d'où $\theta_a = \theta_0 e^{-\frac{z}{\delta_a}} e^{j(\Omega t - \frac{z}{\delta_a})}$

$$\boxed{T_a = T_{as} + \theta_0 e^{-\frac{z}{\delta_a}} \cos\left(\Omega t - \frac{z}{\delta_a}\right)}$$ 0,75

δ_a est l'épaisseur de peau ou l'épaisseur sur laquelle se ressentent les effets de variation sinusoïdale de température 0,25

AN : $\delta_a = \sqrt{\frac{2D_a}{\Omega}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,2 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 100}} = 2,6 \cdot 10^{-4}\,\text{m} = 0,26\,\text{mm}$ 0,25

Seule une fine couche d'air au voisinage de l'interface voit sa température osciller. 0,25

X PC 07 N 16,75

1) a) TCI à 1 macromolécule : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{m\vec{g}}_{\text{poids}} - \underbrace{m'\vec{g}}_{\text{archimède}} \underbrace{- \alpha\vec{v}}_{\text{viscosité}}$

0,75 Vitesse limite $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \longrightarrow \boxed{\vec{v}_g = \frac{(m-m')}{\alpha}\vec{g}}$

(0,25 si oubli vg)

0,5 b) $\boxed{\vec{J}_g = n\vec{v}_g = n\frac{m-m'}{\alpha}\vec{g}}$

0,25 2) Diffusion : $\vec{J}_d = -D\,\vec{\text{grad}}\,n$

0,5 Equilibre : $\vec{J}_d + \vec{J}_g = \vec{0}$ d'où $-D\frac{dn}{dz} + n\frac{(m-m')}{\alpha}(-g) = 0$ pour $z \uparrow$

+ ... attention sur les signes

0,25 ⚠ $\vec{g} = -g\vec{e}_z$

0,5 d'où $\boxed{\frac{dn}{dz} + \frac{n(m-m')}{D\alpha}g = 0}$

0,75 Résolution : $\boxed{n(z) = n(0)\,e^{-\frac{(m-m')}{D\alpha}gz}}$

0,25 Longueur caract : $\boxed{\delta = \frac{D\alpha}{(m-m')g}}$

0,25 3) Identification avec $n(z) = n(0)\,e^{-\frac{(m-m')}{kT}gz} \longrightarrow \boxed{D\alpha = kT}$

0,25 4) a) $\boxed{D = \frac{kT}{\alpha} = \frac{kT}{6\pi\eta a}} \longrightarrow \boxed{\log D = \text{cte} - \log a}\left(= \log\frac{kT}{6\pi\eta} - \log a\right)$

0,25 $\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3} \Rightarrow D = \frac{kT\,(\frac{4}{3}\pi\rho)^{\frac{1}{3}}}{6\pi\eta\, m^{\frac{1}{3}}} \longrightarrow \log D = \log\frac{kT(\frac{4}{3}\pi\rho)^{\frac{1}{3}}}{6\pi} - \frac{1}{3}\log m = \text{cte}' - \frac{1}{3}\log m$

0,75 $\longrightarrow \boxed{\log D = \text{cte}' - \frac{1}{3}\log m}$

1 b) Pente du graphe $\log D$ fonction de $\log a$: $\frac{\log(2.10^{-9}) - \log 10^{-11}}{\log 1 - \log(200)} = -1$

ce qui vérifie bien la théorie $\log D = \text{cte} - \log a$

0,5 Pente du graphe $\log D$ en fonction de $\log m$: $\frac{\log 5 - \log 0,5}{\log 1 - \log 500} = -0,37 \simeq -\frac{1}{3}$

rq : $\log(5.10^{-4}) - \log(0,5.10^{-4}) = \log 5 - \log 0,5$
$\log(10^5) - \log(5.10^7) = \log 1 - \log 500$

ce qui vérifie à peu près la théorie $\log D = \text{cte}' - \frac{1}{3}\log m$.

2.1) $\boxed{\operatorname{div} \vec{v} = 0}$

0,25

2.2) $\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \Phi$; $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\ ) = \vec{0}$ $\Big\} \longrightarrow \boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{v} = \vec{0}}$

0,25

2.3) $\Phi_u = u z \longrightarrow \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \Phi = \vec{v}_u = u \vec{e}_z$

0,25 Champ de vitesse uniforme u parallèle à Oz

2.4) $\Phi_u = u r \cos\theta \longrightarrow \boxed{\vec{v}_u = \left| \begin{array}{l} u\cos\theta \\ -u\sin\theta \\ 0 \end{array} \right.}$

0,5 $\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \Phi_u = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi_u}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Phi_u}{\partial z} \end{array} \right.$

2.5) $\Phi_s = \left(u r + \dfrac{b}{r^2}\right)\cos\theta \longrightarrow \boxed{\vec{v}_s \left| \begin{array}{l} \cos\theta\left(u - \dfrac{2b}{r^3}\right) \\ -\sin\theta\left(u + \dfrac{b}{r^3}\right) \\ 0 \end{array} \right.}$

0,5

2.6) $\operatorname{div} \vec{v}_s = \dfrac{2}{r}\cos\theta\left(u - \dfrac{2b}{r^3}\right) + \cos\theta \cdot \dfrac{6b}{r^4}$

$- \cos\theta\left[\dfrac{u}{r} + \dfrac{b}{r^4}\right] - \cos\theta\left[\dfrac{u}{r} + \dfrac{b}{r^4}\right]$

0,5 $= \cos\theta\left(u\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r}\right) + \dfrac{b}{r^4}(-4+6-1-1)\right]$

$\boxed{\operatorname{div} \vec{v}_s = 0}$ (OK)

2.7) $v_r = 0$ en $r = a$ $\longrightarrow u = \dfrac{2b}{a^3} \longrightarrow \boxed{b = \dfrac{u a^3}{2}}$

0,25

0,25 d'où $\boxed{\vec{v}_s \left| \begin{array}{l} u\cos\theta\left(1 - \dfrac{a^3}{r^3}\right) \\ -u\sin\theta\left(1 + \dfrac{a^3}{2r^3}\right) \\ 0 \end{array} \right.}$

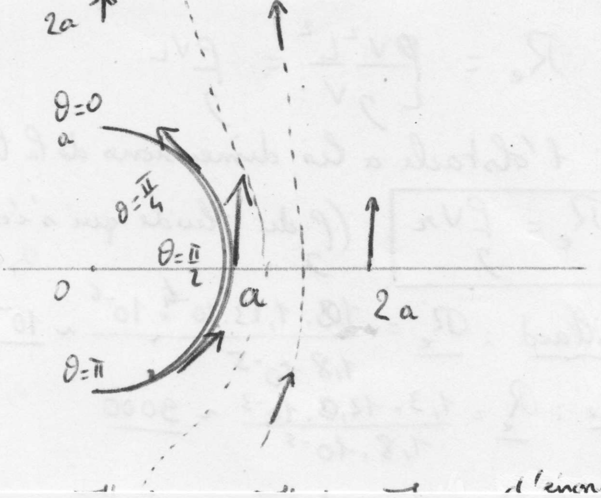
2.8) $\boxed{\text{Pour } r = a \text{ et } u = 1 \quad \vec{v}_s = \left| \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{3}{2}\sin\theta \\ 0 \end{array} \right.}$

$\boxed{\text{Pour } r = 2a \text{ et } u = 1 \quad \vec{v}_s = \left| \begin{array}{l} \frac{7}{8}\cos\theta \\ -\frac{17}{16}\sin\theta \\ 0 \end{array} \right.}$

0,75

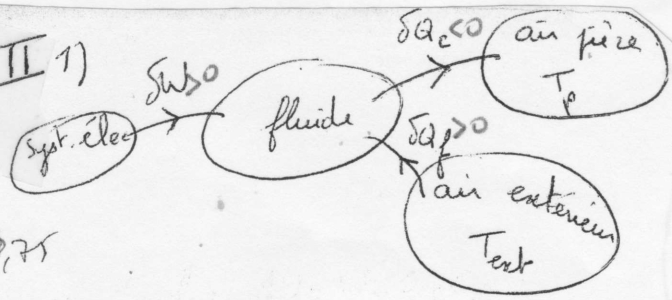
r	θ	v_r	v_θ	r	θ	v_r	v_θ
a	0	0	0	$2a$	0	$7/8$	0
	$\pi/4$	0	$-3/2\sqrt{2}$		$\pi/4$	$7/8\sqrt{2}$	$-17/16\sqrt{2}$
	$\pi/2$	0	$-3/2$		$\pi/2$	0	$-17/16$
	$3\pi/4$	0	$-3/2\sqrt{2}$		$3\pi/4$	$-7/8\sqrt{2}$	$-17/16\sqrt{2}$
	π	0	0		π	$-7/8$	0

2.9)



l'énoncé indique

II 1)   N/ 6,25



0,75

2) hyp : pièce à t° constante $T_f = T_p$ 1er principe au fluide pour 1 cycle : $\underbrace{\Delta U}_{0} = W + Q_c + Q_f$

2nd ———————— : $\Delta S = \Delta S_{éch}$ (rév.)

$0 = \frac{Q_c}{T_f} + \frac{Q_f}{T_{ext}}$

éliminer Q_f

1
0,25   Déf° $e \hat{=} \frac{|Q_c|}{W} = \frac{-Q_c}{-Q_c - Q_f} = \boxed{\frac{1}{1 - \frac{T_{ext}}{T_f}}} = \frac{1}{1 - \frac{275}{298}} = 13$

t° de la pièce à la fin

3)   1er principe au fluide pour cycle $\Delta U = \delta W + \delta Q_c + \delta Q_f$

notation : $\delta Q_f = \delta Q_{atm \to fluide}$

1,5   1er principe à l'air pièce : $\delta Q_c = -C\,dT_p \; (= -dH_{pièce})$

$\delta W = P_u\,dt$

$\Rightarrow 0 = P_u\,dt - C\,dT_p + \delta Q_{atm \to fl}$

$\Downarrow$

$\boxed{\delta Q_{atm \to fl} = C\,dT_p - P_u\,dt}$

. 2e principe au fluide pour 1 cycle : $dS = \delta S^e + \underbrace{\delta S^p}_{\text{produit par irrév}}$

$\hookrightarrow 0 = \delta S^e + \delta S^p$

. $\delta S^e = \frac{\delta Q_c}{T_p} + \frac{\delta Q_f}{T_{ext}} = -\frac{C\,dT_p}{T_p} + \frac{\delta Q_{atm \to fl}}{T_{ext}}$

0,5 $\to \delta S^e = -\frac{C\,dT_p}{T_p} + \frac{C\,dT_p}{T_{ext}} - \frac{P_u\,dt}{T_{ext}} \to \boxed{\delta S^e = C\,dT_p\left(\frac{1}{T_{ext}} - \frac{1}{T_p}\right) - \frac{P_u\,dt}{T_{ext}}}$

. cycle rév $\to \delta S^p = 0 \to 0 = \delta S^e \to 0 =$ idem

0,25 $\Rightarrow \boxed{dT_p\left(\frac{1}{T_{ext}} - \frac{1}{T_p}\right) = \frac{P_u\,dt}{C\,T_{ext}}}$ (OK)

0,75   . Intégrer $\frac{T_f - T_{ext}}{T_{ext}} - \ln\frac{T_f}{T_{ext}} = \frac{P_u\,\Delta t}{C\,T_{ext}} \to \boxed{\Delta t = \frac{C\,T_{ext}}{P_u}\left[\frac{T_f}{T_{ext}} - 1 - \ln\frac{T_f}{T_{ext}}\right]}$

AN 0,25
0,25 commentaire   AN $\Delta t = \frac{126 \times 10^3 \times 275}{500}\left[\frac{298}{275} - 1 - \ln\frac{298}{275}\right] = 229\,s$ Très rapide ! (modèle idéal de réversibilité)

0,5
0,25
0,25   4) $P_u\,\Delta t_2 = C\,\Delta T \to \Delta t_2 = \frac{C\,\Delta T}{P_u} = \frac{126.10^3\,(298 - 275)}{500} = 5796\,s = 1\,h\,36\,min$

$\gg$ + long (intérêt de la pompe chaleur)

5) . 2nd principe $0 = C\,dT_p\left(\frac{1}{T_{ext}} - \frac{1}{T_p}\right) - \frac{P_u\,dt}{T_{ext}} + \delta S^p$

0,5   intégrer $\boxed{S^p = \frac{P_u}{T_{ext}}\Delta t' + C\ln\frac{T_f}{T_{ext}} - \frac{C}{T_{ext}}(T_f - T_{ext}) = \frac{P_u}{T_{ext}}(\Delta t' - \Delta t)}$