

I.1) Le signe - traduit le sens du transfert de chaleur des températures hautes vers les basses ($\vec{j}$ opposé à $\text{grad } T$ qui a le sens des T basses vers les hautes)

I.2) $d\phi = \vec{j} \cdot \vec{n} ds$

I.3) Par définition du gradient : $dT = \text{grad } T \cdot d\vec{l}$
 Une isotherme se situe sur la ligne où $dT = 0$
 donc sur laquelle $\text{grad } T \perp d\vec{l}$
 Comme $\vec{j} \parallel \text{grad } T$, une isotherme se situe sur la ligne où $\vec{j} \perp d\vec{l}$
 les lignes de flux sont définies comme parallèles à $\vec{j}$
 Donc les lignes de flux sont perpendiculaires aux isothermes

I.4)
$$\underbrace{\iiint \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV}_{\text{stockage d'énergie dont la conséquence est une variation temporelle de } T} + \underbrace{\iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} ds}_{\text{échange ou transfert d'énergie à travers la surface enveloppe}} = \underbrace{\iiint P_{th} dV}_{\text{production d'énergie dans le matériau}}$$

Green. Ostrogradski : $\iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} ds = \iiint \text{div } \vec{j} dV$

Loi de Fourier : $\vec{j} = -\lambda \text{grad } T$

Opérateur : $\text{div}(\text{grad}) = \Delta$

d'où $\iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} ds = \iiint -\lambda \Delta T dV$

rq : on a pu écrire $\text{div}(-\lambda \text{grad } T) = -\lambda \text{div grad } T$
 car λ est supposé uniforme

En réduisant le volume global à un infiniment petit, on obtient l'équation locale :

$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = P_{th}$ ou $\boxed{\frac{\rho c \partial T}{\lambda \partial t} = \Delta T + \frac{P_{th}}{\lambda}}$

L'équation note $\boxed{a = \frac{\lambda}{\rho c}}$

a s'appelle la diffusivité ou coefficient de diffusion thermique

Unité de a : $\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \sim \Delta T$ donc $\underline{a \sim \frac{L^2}{t} \frac{m^2 \cdot s^{-1}}{K}}$

II.1) Le terme $\frac{\partial T}{\partial t}$ a disparu : on est donc en régime stationnaire

Le terme avec P_{th} a disparu : il n'y a pas de puissance produite dans le matériau

$\frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{d^2 T}{dr^2} = 0$ peut s'écrire $\frac{d(\frac{dT}{dr})}{\frac{dT}{dr}} = -\frac{dr}{r}$

puis s'intégrer en $\ln \frac{dT}{dr} = -\ln r + C_1$

càd en $\boxed{\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}}$

Intégrons à nouveau : $T = C_1 \ln r + C_2$

Appliquons les conditions aux limites : T_1 en r_1 , T_2 en r_2

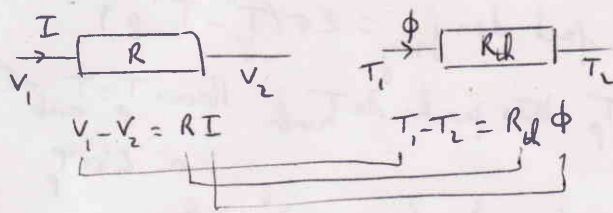
$\rightarrow T(r) = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1} + T_1$

$\phi = j 2\pi r L$ avec $j = -\lambda \frac{dT}{dr}$

$\rightarrow \boxed{\phi = \frac{\lambda (T_1 - T_2) 2\pi L}{\ln \frac{r_2}{r_1}}}$

Le flux est constant, càd uniforme et invariable car il n'y a pas de terme de production d'énergie à l'intérieur du matériau, et le régime est supposé stationnaire.

II.2 $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi L \lambda}$ en $K \cdot W^{-1}$



II.3) $\frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{d^2 T}{dr^2}$ provient de ΔT

Il faut donc rajouter $\frac{P_{th}}{\lambda}$

d'où $\boxed{\frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{P_{th}}{\lambda} = 0}$

1 méthode possible, c'est autre méthode à la fin)
 Remarquer que $\frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{d^2 T}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{d(r \frac{dT}{dr})}{dr}$

d'où $\boxed{\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dT}{dr}) = -\frac{P_{th}}{\lambda}}$

1^{re} intégration : $r \frac{dT}{dr} = - \frac{1}{\lambda} \frac{r^2}{2} + C_1$

2^e intégration : $T = - \frac{1}{4\lambda} r^2 + C_1 \ln r + C_2$

Conditions aux limites : T_1 en r_1 , T_2 en r_2
(calculs)

$$T(r) = T_1 - \frac{1}{4\lambda} (r^2 - r_1^2) + (T_1 - T_2 + \frac{1}{4\lambda} (r_1^2 - r_2^2)) \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

$\Phi = j 2\pi r L = - \lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r L$ n'est plus proportionnel à $T_1 - T_2$. On ne peut plus définir de résistance thermique comme $\frac{T_1 - T_2}{\Phi}$.

II 4) Elec : $V_p - V_f = RI$

chaleur : $T_p - T_f = R_{th} \Phi$ avec $\Phi = j_c 2\pi r_2 L$

(la surface traversée par j_c est $2\pi r_2 L$)

d'où $R_c = \frac{T_p - T_f}{\Phi} = \frac{T_p - T_f}{j_c 2\pi r_2 L}$

On $j_c = h_c (T_p - T_f)$ donc $R_c = \frac{1}{h_c 2\pi r_2 L}$

$j_c = h (T_p - T_f)$ représente une puissance surfacique et ne peut être infinie.

Donc si $h \rightarrow \infty$ nécessairement $T_p \rightarrow T_f$

II 5) On part de $j_{ray} = \epsilon \sigma (T_p^4 - T_{amb}^4)$

avec T_p très proche de T_{amb} : Posons $T_p = T_{amb} + \epsilon'$
où $\epsilon' \ll T_p$

Alors $T_p^4 - T_{amb}^4 = (T_{amb} + \epsilon')^4 - T_{amb}^4$
 $= T_{amb}^4 \left(1 + \frac{\epsilon'}{T_{amb}}\right)^4 - T_{amb}^4$

d.l. ordre 1 : $\approx T_{amb}^3 \times 4\epsilon'$

On T_{amb} étant proche de T_p , on peut dire qu'il est proche de leur moyenne $T_{amb} \approx T_m$

d'où $T_p^4 - T_{amb}^4 \approx 4 T_m^3 \epsilon' = 4 T_m^3 (T_p - T_{amb})$

On a donc $j_{ray} = \epsilon \sigma 4 T_m^3 (T_p - T_{amb})$ (2)

$$h_{ray} = 4 \epsilon \sigma T_m^3$$

AN : $j_{ray} = 4 \times 0,6 \times 5,67 \cdot 10^{-8} \left(\frac{333+293}{2}\right)^3 (333-293)$

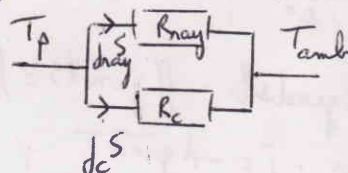
$j_{ray} = 167 \text{ W.m}^{-2}$

$j_c = 5(333-293) = 200 \text{ W.m}^{-2}$

j_c et j_{ray} sont du même ordre de grandeur.

Pour j_c et j_{ray} on a la même différence de t° ($T_p - T_{amb}$) (ou $(T_p - T_f)$ mais $T_f = T_{amb}$)

On a donc même différence de t° pour 2 puissances surfaciques différentes, ou pour 2 puissances différentes puisque la surface traversée est la même. Cela correspond à une même d.d.f pour 2 intensités de courant différentes. Il s'agit donc d'une dérivation.



Puisque $R_c = \frac{1}{h_c 2\pi r_2 L}$ pour $j_c = h_c (T_p - T_{amb})$

on aura $R_{ray} = \frac{1}{h_{ray} 2\pi r_2 L}$ pour $j_{ray} = h_{ray} (T_p - T_{amb})$

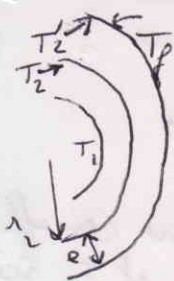
La résistance équivalente des 2 résistances en parallèle est $R = \frac{R_c R_{ray}}{R_c + R_{ray}}$

ou $R^{-1} = R_c^{-1} + R_{ray}^{-1} = 2\pi r_2 L (h_c + h_{ray})$

soit $R = \frac{1}{(h_c + h_{ray}) 2\pi r_2 L} = \frac{1}{h 2\pi r_2 L}$

$$h = h_c + h_{ray}$$

II 6) $P_{th} = 0$ impliquent une puissance constante régime stat.



la conducto-convexion se situe à la limite extérieure solide-fluide. Conducteur entre r_1 et r_2 :

$$R_{th} \phi = T_1 - T_2$$

Isolant "conducteur" entre r_2 et $r_2 + e$

$$R_{isol} \phi = T_2 - T'_2$$

Conducto-convexion en $r_2 + e$:

$$\phi = T'_2 - T_f$$

$$\text{On ajoute : } (R_{th} + R_{isol} + R_c) \phi = T_1 - T_f$$

3 résistances en série :

$$R_{th} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi L \lambda} \quad \text{calculée en II 2}$$

$$R_c = \frac{1}{h_c 2\pi (r_2 + e)L} \quad \text{calculée en II 4 adaptée en } r_2 + e$$

$$R_{isol} = \frac{\ln \frac{r_2 + e}{r_2}}{2\pi L \lambda_e}$$

$$\text{II 7) } \phi = \frac{T_1 - T_f}{R_{th} + R_{isol} + R_c}$$

$$\phi = \frac{(T_1 - T_f) 2\pi L}{\frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_e} \ln \frac{r_2 + e}{r_2} + \frac{1}{h_c (r_2 + e)}}$$

On souhaite un flux minimal. Il faut donc maximiser le dénominateur.

Si la variable est e l'épaisseur de l'isolant l'extremum de ϕ correspond à

$$\frac{d}{de} \left(\frac{1}{\lambda_e} \ln (r_2 + e) + \frac{1}{h_c (r_2 + e)} \right) = 0$$

$$\text{càd } \frac{1}{\lambda_e} \cdot \frac{1}{r_2 + e} - \frac{1}{h_c (r_2 + e)^2} = 0$$

$$\text{soit } r_2 + e = \frac{\lambda_e}{h_c}$$

(On admet que l'extremum de ϕ est un minimum) Le compromis se situe dans le fait que l'isolant minimise ϕ , d'autant mieux que e est grand. Par contre la conducto-convexion maximise ϕ , d'autant mieux que e est grand parce que la surface d'échange

croît. Il faut donc e ni trop grand ni trop petit. (3)

III 1) Le courant circule entre r_1 et r_2



La résistance sur la longueur L

$$\text{est } R = \int_{elec} \frac{L}{\pi (r_2^2 - r_1^2)}$$

La puissance Joule est $P_J = \frac{R I^2}{L}$ par unité de longueur

$$\rightarrow P_J = \int_{elec} \frac{I^2}{\pi (r_2^2 - r_1^2)}$$

III 2) Bilan pendant dt : la masse δm d'eau qui circule voit sa T° s'élever de dT_{eau} parce qu'elle a reçu l'énergie $p dt dx$. (L'eau ayant parcouru dx a reçu la puissance $p_J dx$)

$$\text{d'où à } p \text{ constante : } \delta m_{eau} c_{eau} dT_{eau} = p_J dt dx$$

$$q \text{ est un débit volumique : } q = \frac{\delta V_{eau}}{dt}$$

$$\rho_{eau} \text{ est une masse volumique : } \rho_{eau} = \frac{\delta m_{eau}}{\delta V_{eau}}$$

$$\text{d'où } \delta m_{eau} = \rho_{eau} q dt$$

$$\text{Ainsi } \rho_{eau} c_{eau} q dT_{eau} = p_J dx$$

En remplaçant p_J on obtient then

$$\rho_{eau} c_{eau} q \frac{dT_{eau}}{dx} = \frac{I^2 \int_{elec}}{\pi (r_2^2 - r_1^2)} \quad (\text{OK})$$

On a supposé que le transfert thermique s'effectuerait uniquement au niveau de la surface de séparation, entre l'intérieur du cylindre r_1 où circule l'eau et le tube où circule le courant. Ce transfert est de nature conducto-convectif.

On a négligé le transfert conductif dans l'eau elle-même, probablement parce que ce transfert est plus lent

les seules variables sont T_{eau} et x

Intégrons entre $x=0$ où $T_{eau} = T_0$ et x

$$\rho_{eau} c_{eau} q (T - T_0) = \frac{I^2 \int_{elec}}{\pi (r_2^2 - r_1^2)} x$$

$$\text{AN } x_c = \frac{10^3 \cdot 4180 (373 - 293) \pi (5,5^2 - 5^2) 10^{-6} \cdot 3,52 \cdot 10^{-6}}{40^2 \times 1350 \times 10^{-6} \times 10^{-2}}$$

$$x_c = 1,5 \text{ m}$$

Pour $x > x_c$, la t° devrait dépasser 373 K qui correspond à 100°C t° d'ébullition de l'eau sous 1 bar.

Cela est impossible : il y a changement d'état pour $x > x_c$.

III 3) Il faut remplacer $\sum_{\text{eau}} c_{\text{eau}} dT_{\text{eau}}$ par $\sum_{\text{eau}} L_v$

$$\text{soit } \sum_{\text{eau}} L_v = \frac{I^2 \sum_{\text{élec}} dx dt}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$$

$$\text{avec } \sum_{\text{eau}} = \rho_{\text{eau}} q dt$$

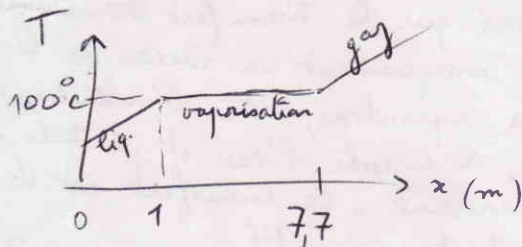
$$\text{d'où } \rho_{\text{eau}} q L_v = \frac{I^2 \sum_{\text{élec}} dx}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$$

La longueur dx représente la distance nécessaire de parcourir de l'eau pour qu'elle se vaporise totalement.

$$\text{C'est donc } d = \frac{\rho_{\text{eau}} q L_v \pi(r_2^2 - r_1^2)}{I^2 \sum_{\text{élec}}}$$

$$\text{AN } d = \frac{10^3 \times 3,92 \times 10^{-6} \times 2250 \times 10^3 \pi (5,5^2 - 5^2) 10^{-6}}{40^2 \times 1350 \times 10^{-6} \times 10^{-2}}$$

$$d = 6,7 \text{ m}$$



Le tube n'est sans doute pas tout-à-fait isolé et il faudra plus de longueur de tube pour vaporiser l'eau.

Autre méthode pour II 3

$$\frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{td}{\lambda} = 0$$

C'est une équation linéaire (en effet si T_h est solution homogène et T_p solution particulière) avec $\frac{1}{r} \frac{dT_h}{dr} + \frac{d^2 T_h}{dr^2} = 0$

$$\text{et } \frac{1}{r} \frac{dT_p}{dr} + \frac{d^2 T_p}{dr^2} + \frac{td}{\lambda} = 0$$

$$\text{on a bien } \frac{1}{r} \frac{d(T_h + T_p)}{dr} + \frac{d^2 (T_h + T_p)}{dr^2} + \frac{td}{\lambda} = 0$$

La solution homogène a déjà été trouvée, en II 1: $T_h = A \ln r + B$

Cherchons une solution particulière sous la forme $T_p = Cr^2 + D$

$$\text{alors } \frac{1}{r} 2Cr + 2C + \frac{td}{\lambda} = 0 \rightarrow C = -\frac{td}{4\lambda}$$

$$\text{donc } T = A \ln r - \frac{td}{4\lambda} r^2 + E$$

On trouve enfin A et E comme pour la 1^{ère} méthode, grâce aux conditions limites.