

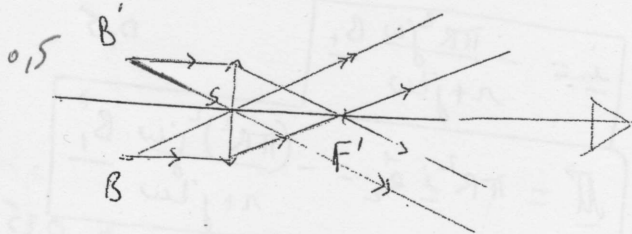
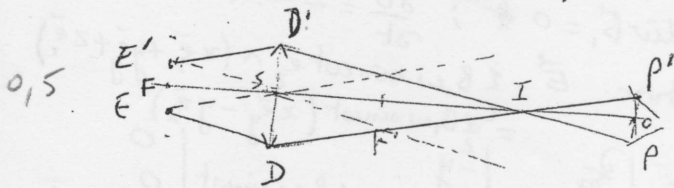
1.1.1. Approximation de Gauss : hyp.

Rayons peu inclinés / axe optique

→ Stigmatisme : l'image d'un point est 1 point

Aplanétisme : l'image d'un objet plan $\perp$ axe est plane $\perp$ axe

1.1.2.

1.1.3. on trace DP' puis le rayon // passant par S (non dévié)

Comme l'objet est dans le plan focal objet, on déduit E car 2 rayons issus du même point du plan focal objet ressortent parallèles entre eux

E' est symétrique de E / axe optique

1.1.4. On retrouve un même angle α plusieurs fois : $\tan \alpha = \frac{FE'}{SF} = \frac{OP'}{OI} = \frac{SD'}{SI}$ On a $OI + SI = OS$ soit $(OP' + SD') \frac{SF}{FE'} = OS$ Ainsi $FE' = (OP' + SD') \frac{SF}{OS}$ et en doublant :

$$EE' = (PP' + DD') \frac{SF}{OS} \quad \text{AN: } EE' = (6 + 20) \frac{12}{200} = EE' = 1,56 \text{ mm}$$

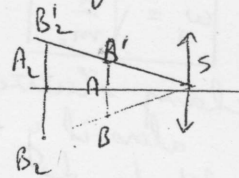
$$\tau_1 = \left(\frac{EE'}{BB'} \right)^2 = \left(\frac{1,56}{20} \right)^2 = 6\%$$

$$1.2.1. \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{SA_2} - \frac{1}{SA} \Rightarrow \frac{1}{SA_2} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{SA}$$

$$\text{AN} \quad \frac{1}{SA_2} = \frac{1}{36} + \frac{1}{-12} \Rightarrow SA_2 = -18 \text{ mm}$$

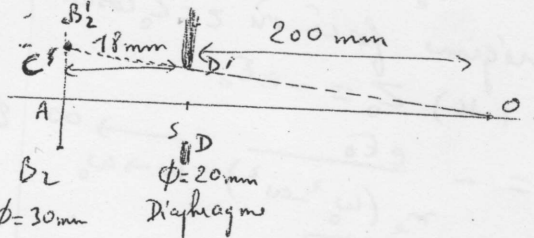
L'image $B_2B'_2$ de l'objet BB' est à -18 mm de S

Celle image est virtuelle, la lentille fonctionne en loupe.



Le rayon passant par S n'est pas dévié, donc $\frac{B_2B'_2}{BB'} = \frac{SA_2}{SA} = \frac{18}{12} = 1,5$

$$\text{d'où } B_2B'_2 = 1,5 BB' = 1,5 \times 20 = 30 \text{ mm}$$

1.2.2. La distance entre l'œil et le plan image $B_2B'_2$ est $200 + 18 = 218 \text{ mm}$ 

Si on prolonge OD' vers la gauche, on atteint un point C' . Montrons que C' est en-dessous de B'_2 . $\frac{AC'}{SD'} = \frac{OA}{OS} \rightarrow AC' = OA \cdot \frac{SD'}{OS}$

$$AC' = (200 + 18) \frac{10}{200} = 10,9 \text{ mm}$$

On $AB'_2 = 15 \text{ mm}$ on a bien $AC' < AB'_2$ donc le diaphragme DD' masque une partie de l'image $B_2B'_2$ à l'œil situé en O

$$\tau_2 = \left(\frac{AC'}{AB'_2} \right)^2 = \left(\frac{10,9}{15} \right)^2 = 53\%$$

1.3.1. La distance focale est obtenue

à partir d'un objet A situé à l' ∞ il donne F' selon $n_1 \left(\frac{1}{SF'} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{n_2 - n_1}{CS}$

$$\text{soit } f' = SF' = \frac{CS n_1}{n_2 - n_1}$$

$$\text{A.N. } f' = 6 \times \frac{1}{1,5 - 1} = 12 \text{ mm}$$

$$1.3.2. \text{ Idem } f'_2 = \frac{CS n_1}{n_2 - n_3} = \frac{6 \times 1}{1,5 - 1,33} = 35,3 \text{ mm}$$

1.3.3. $n_3 = 1,33$ indice de l'eau $n_2 = 1,5$ indice du verre

Fig a : gobelet vide : $f' = 12 \text{ mm}$: objet du plan focal
Fig b : gobelet plein : $f'_2 = 35 \text{ mm}$: l'objet est entre F et S → fonctionne en loupe ; l'œil voit l'image (virtuelle)
Pour moi, l'œil doit voir aussi de la cas fig a (c'est limite) en-dessous de 12 mm il ne voit plus rien

PB II

2.1.1. TCI à e : $m_e \ddot{z} = -Kz$
 $\ddot{z} + \frac{K}{m_e} z = 0$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m_e}}$

Si on applique un champ électrique de fréquence $\omega = \omega_0$ alors il y a résonance, l'amplitude de vibration étant infinie (en absence de frottement).

En effet $m_e \ddot{z} = -Kz - eE_0 \cos \omega t$
 soit en régime forcé où $z = z_0 \cos \omega t$
 $(-\omega^2 m_e + K) z_0 = -eE_0$
 $z_0 = -\frac{eE_0}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_0} \infty$

2.1.2. $\mathcal{E}_A = \frac{1}{2} K z^2$

Sachant : $\mathcal{E}_A = 13,6 \text{ eV} = 13,6 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$

$\frac{K}{2} = \frac{2 \mathcal{E}_A}{z^2} = \frac{2 \times 13,6 \times 1,6 \times 10^{-19}}{(1 \times 10^{-10})^2} = 435,2 \frac{\text{N.m}}{\text{m}^2}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m_e}} = \sqrt{\frac{435,2}{9,1 \times 10^{-31}}} = 2,15 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$

$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 3,5 \times 10^{15} \text{ Hz}$

2.1.3. $m_e \ddot{z} = -Kz - \gamma \dot{z} - eE_0 \cos \omega t$

Notation complexe, $z = z_0 \cos(\omega t + \varphi)$
 $\underline{E} = E_0 e^{j\omega t}$ $\underline{z} = z_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$

d'où $(-m_e \omega^2 + j\gamma \omega + \omega_0^2 m_e) z_0 e^{j\varphi} = -e \underline{E}_0$

ou $(\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\lambda \omega) z_0 e^{j\varphi} = -\frac{eE_0}{m_e}$

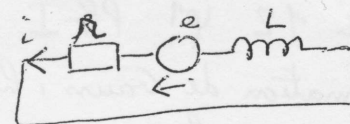
2.1.4. Ici $\underline{z} = z_0 e^{j\varphi}$

$\underline{z} = -\frac{eE_0}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\lambda \omega)}$

Amplitude : $|\underline{z}| = \frac{eE_0}{m_e \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2 \omega^2}}$

2.1.5. $\underline{p} = -e \underline{z}$ et $\underline{p} = -e \underline{z}$

d'où $\underline{p} = -e \underline{z}$ soit $\alpha = \frac{p}{E_0} = \frac{e}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\lambda \omega)}$

2.2.1.  $e = r i + L \frac{di}{dt}$ 0,5

2.2.2. $\Phi(t) = B_1 \pi R^2$
 $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi R^2 \frac{dB_1}{dt}$ 0,25
 corrélativement au sens de i de la fig 2.2 0,25

2.2.3. En complexe, $\underline{e} = r \underline{i} + j\omega L \underline{i}$
 et $\underline{e} = -\pi R^2 j\omega \underline{B}_1$

d'où $\underline{i} = \frac{-\pi R^2 j\omega \underline{B}_1}{r + j\omega L}$ 0,5

2.2.4. $\underline{M} = \pi R^2 \underline{i} \underline{e}_z = -\frac{(\pi R^2)^2 j\omega \underline{B}_1}{r + j\omega L}$ 0,25

2.3.1. $\underline{B}_1 = B_1 \cos \omega t \underline{e}_z$ uniforme donc $\text{div} \underline{B}_1 = 0$; $\frac{\partial \underline{B}_1}{\partial t} = -\omega B_1 \sin \omega t \underline{e}_z$

Avec : $\underline{E} = 1 B_1 \omega \sin \omega t \underline{e}_z \wedge (x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z)$
 $= \frac{1}{2} B_1 \omega \sin \omega t (x \underline{e}_y - y \underline{e}_x)$

$\text{rot} \underline{E}_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} B_1 \omega \sin \omega t \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$

$= B_1 \omega \sin \omega t \underline{e}_z$

on a bien $\text{rot} \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$ (OK) 0,25

$\text{div} \underline{E}_1 = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{2} B_1 \omega \sin \omega t (0 - 0)$

car $E_z = 0$ E_x ne dépend que de y
 E_y ne dépend que de x

On a bien $\text{div} \underline{E}_1 = 0$ (OK) 0,25

2.3.2. $\text{rot} \underline{B}_1 = \underline{0}$ car $\underline{B}_1$ uniforme
 or $\text{rot} \underline{B}_1 = \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$ et ici $\underline{E}_1$ dépend du temps.

$\frac{\partial \underline{E}_1}{\partial t} \neq \underline{0}$ car $\underline{E}_1$ dépend du temps.
 Il faut donc pouvoir négliger $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{E}_1}{\partial t}$ 0,25

L'approximation classique consistant à négliger $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{E}_1}{\partial t}$ est l'approximation des régimes quasi-stationnaires. 0,25

2.3.3. $\left\| \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \right\| \sim \omega E_1$

$\gamma = \frac{\frac{1}{c^2} \left| \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \right|}{\frac{B_1}{R}} \sim \frac{\omega E_1 R}{c^2 B_1}$

Mais avec $\text{rot} \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$ on peut aussi donner un ordre de grandeur: $\frac{E_1}{R} = \omega B_1$

soit $\frac{E_1}{B_1} = \omega R$

Ainsi $\gamma \sim \left(\frac{\omega R}{c} \right)^2$

Souhait: $\gamma < 10^{-2} \Rightarrow \omega R < 10^{-1} c$

$\omega < 10^{-1} \frac{c}{R}$ ou $\omega < \omega_c$ avec $\omega_c = 10^1 \frac{c}{R}$

AN $\omega_c = 10^{-1} \cdot \frac{3 \times 10^8}{10^{-10}} = 3 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1}$

2.3.4. $\vec{f}_L = q(\vec{E}_1 + \vec{v} \wedge \vec{B}_1)$

2.3.5. $\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$
 $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$

2.3.6. $m_e \vec{a} = \vec{f}_L + \vec{f}_v + \vec{f}_r$ (TCI) de R_{gal}
 Projeter sur $\vec{e}_\theta$:
 $m_e R \ddot{\theta} = \vec{f}_L \cdot \vec{e}_\theta - \gamma R \dot{\theta} + 0$

On remarque que $\vec{E}_1 = \frac{1}{2} B_1 \omega R \sin \omega t \vec{e}_\theta$
 càd $\vec{E}_1 = \frac{1}{2} B_1 \omega R \sin \omega t \vec{e}_\theta$

En revanche $\vec{v} \wedge \vec{B}_1 \propto \vec{e}_\theta$ puisque $\vec{v} \wedge \vec{B}_1 \perp \vec{v}$ lui-même parallèle à $\vec{e}_\theta$.

Donc $m_e R \ddot{\theta} = \frac{1}{2} q B_1 \omega R \sin \omega t - \gamma R \dot{\theta}$

2.3.7. Si $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{q}$ alors

$m_e R \frac{2\pi}{q} \frac{di}{dt} = \frac{1}{2} B_1 \omega R \sin \omega t - \gamma R \frac{2\pi}{q} i$

soit $\gamma R \frac{2\pi}{q} i + m_e R \frac{2\pi}{q} \frac{di}{dt} = \frac{1}{2} B_1 \omega R \sin \omega t$

Pour retrouver l'analogie de 2.2.1. et 2.2.2, on multiplie par $2\pi R$

$(2\pi R)^2 \frac{\gamma}{q} i + (2\pi R)^2 \frac{m_e}{q} \frac{di}{dt} = -\pi R^2 \frac{dB_{total}}{dt}$

Par identification: $r = \frac{(2\pi R)^2 \gamma}{q}$
 $L = \frac{(2\pi R)^2 m_e}{q}$

2.3.8. Comme en 2.2.4 $\vec{M} = \pi R^2 i \vec{e}_z$
 et que $i = \frac{q}{2\pi} \dot{\theta}$ cela fait $\vec{M} = \frac{q R^2 \dot{\theta}}{2} \vec{e}_z$

2.4.1. Mouvement hélicoïdal:

$\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta + A\dot{\theta} \vec{e}_z$

$E_c = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} m_e \dot{\theta}^2 (R^2 + A^2)$

2.4.2. $P(f_r) = \vec{f}_r \cdot \vec{v}$

$P(f_r) = -K(r\vec{e}_r + z\vec{e}_z) \cdot \dot{\theta} (R\vec{e}_\theta + A\vec{e}_z)$

d'où $P(f_r) = -KA\dot{\theta}^2 = -KA^2\ddot{\theta}$

La réaction normale est $\perp$ déplacement càd $\perp \vec{v}$ donc $P(f_r) = 0$

$P(f_v) = \vec{f}_v \cdot \vec{v} = -\gamma \vec{v} \cdot \vec{v} = -\gamma v^2$

$P(f_v) = -\gamma R \dot{\theta}^2 - \gamma A \dot{\theta}^2$

2.4.3. La force magnétique n'a pas de puissance car $\vec{v} \wedge \vec{B}_1 \perp \vec{v}$
 Il reste les forces électriques:

$P(f_L) = q(\vec{E}_0 + \vec{E}_1) \cdot \vec{v}$
 $= q(E_0 \cos \omega t \vec{e}_z + \frac{\omega}{2} B_1 R \sin \omega t \vec{e}_\theta) \cdot \dot{\theta} (R\vec{e}_\theta + A\vec{e}_z)$

$P(f_L) = q E_0 \cos \omega t \dot{\theta} A + q \frac{\omega}{2} B_1 R \sin \omega t \dot{\theta} R$

2.4.4. Dans R_{gal} $\frac{dE_c}{dt} = P(f_r) + P(f_r) + P(f_v) + P(f_L)$

d'où $m_e \ddot{\Theta}(R^2 + A^2) = -KA\ddot{\Theta} - \gamma R^2 \ddot{\Theta}$
 $- \gamma \dot{\Theta} \dot{A} + q E_0 \cos \omega t \dot{\Theta} A$
 $+ q \frac{\omega}{2} B_1 R \sin \omega t \dot{\Theta} R$
 on peut simplifier par $\dot{\Theta}$; $z = A\dot{\Theta} \Rightarrow \dot{z} = A\ddot{\Theta}$

0,5
$$m_e (A^2 + R^2) \ddot{\Theta} + \gamma (A^2 + R^2) \dot{\Theta} + KA^2 \ddot{\Theta} = q (AE_0 \cos \omega t + \frac{B_1 \omega R^2}{2} \sin \omega t) \quad (OK)$$

2.4.5. En complexe on remplace $\cos \omega t$ par $e^{j\omega t}$ et $\sin \omega t$ par $j e^{j\omega t}$ de façon à ce que $\text{Re}(e^{j\omega t}) = \cos \omega t$
 $\text{Re}(-j e^{j\omega t}) = \sin \omega t$

d'où $[m_e (A^2 + R^2)(-\omega^2) + \gamma (A^2 + R^2)j\omega + KA^2] \underline{\Theta} = q (AE_0 + j \frac{B_1 \omega R^2}{2})$

1 soit
$$\underline{\Theta} = \frac{q (AE_0 - j \frac{B_1 \omega R^2}{2})}{-m_e (A^2 + R^2) \omega^2 + KA^2 + j \gamma (A^2 + R^2) \omega}$$

2.4.6.
$$\begin{cases} \underline{P} = q \underline{z} = q A \underline{\Theta} \\ \underline{M} = \frac{q}{2} R^2 j \omega \underline{\Theta} \end{cases} \quad (z = A\dot{\Theta})$$

d'où
$$\begin{cases} \underline{P} = \alpha_p E_0 - \beta j \omega B_1 \\ \underline{M} = \beta j \omega E_0 + \alpha_m \omega^2 B_1 \end{cases}$$

avec
$$\begin{aligned} \alpha_p &= \frac{q^2 A^2}{m_e D(j\omega)} \\ \beta &= \frac{q^2 R^2 A}{2 m_e D(j\omega)} \\ \alpha_m &= -\frac{q^2 R^4}{m_e 4 D(j\omega)} \end{aligned}$$

2.4.7. Si on change A en $-A$ alors α_p et α_m sont inchangés
 Seul β change de signe.

2.5.1. Pour trouver l'équation de propagation, on fait $\text{rot rot } \vec{E}$

A partir de $\text{div } \vec{B} = 0$ (4)
 $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{div } \vec{E} = 0$

$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\text{rot } \vec{H} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Ici $v' = 0$ donc $\vec{H} = \vec{0}$

$v = 0$ donc $\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$

ainsi $\text{rot } \vec{B} = (\mu_0 (\epsilon - \epsilon_0) + \epsilon_0 \mu_0) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Alors $\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$ donne:

$-\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0 - \Delta \vec{E} \quad \text{soit}$

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$c' = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}}$

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \left(\Delta \vec{E} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \right)$$

 eq. d'onde

2.5.2. Si $v \neq 0$ et $v' \neq 0$ alors

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left[v' \frac{\partial (\text{rot } \vec{E})}{\partial t} + (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - v \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \right] + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$= \mu_0 v' \left(-\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \right) + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 v \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 (v + v') \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (OK)$$

2.5.3. $\text{rot rot } \vec{B} = \text{grad div } \vec{B} - \Delta \vec{B}$ donne:

$\mu_0 \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \mu_0 (v + v') \text{rot} \left(\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \right) = 0 - \Delta \vec{B}$

soit
$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \mu_0 (v + v') \text{rot} \left(\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \right) = \vec{0} \quad (OK)$$

2.5.4. Injections $\vec{B}_{\pm}$: ($B_x = 0$)

$$\Delta \vec{B} = \Delta B_y \vec{e}_y + \Delta B_z \vec{e}_z$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Delta B_y = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = -k_+^2 B_y \quad \text{De m} \quad \Delta B_z = -k_+^2 B_z \quad (5)$$

En fait $\Delta \vec{B} = -k_+^2 \vec{B}$ (ce qui est normal car B_+ est plane ca'd uniforme dans le plan d'onde $\perp \vec{e}_x$)

$$\begin{aligned} \text{Donc } \underbrace{-k_+^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon (-\omega^2) \vec{B}}_{\text{idem}} - \mu_0 (r+r') \text{rot}(-\omega^2 \vec{B}) &= \vec{0} \\ &+ \mu_0 (r+r') \omega^2 \text{rot}(e^{-j k_+ x}, \text{le reste}) = \vec{0} \\ &+ \mu_0 (r+r') \omega^2 (-j k_+ \vec{e}_x \wedge \vec{B}_+) = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \vec{e}_x \wedge \vec{B}_+ = B_+ (\vec{e}_z + j(-\vec{e}_y)) e^{j(\omega t - k_+ x)} = -j \vec{B}_+ \quad (\text{d'où } \text{rot} \vec{B}_+ = -j k_+ \vec{B}_+)$$

$$\text{donc } (-k_+^2 + \mu_0 \epsilon \omega^2 + \mu_0 (r+r') \omega^2 k_+) \vec{B}_+ = \vec{0}$$

$$\text{La relation de dispersion est donc : } \boxed{k_+^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \mu_0 (r+r') \omega^2 k_+)}$$

$$2.5.5. \text{ Avec } k_- \quad \vec{B}_- = B_- (\vec{e}_y - j \vec{e}_z) e^{j(\omega t - k_- x)} \quad \text{rot} \vec{B}_- = -j k_- \vec{e}_x \wedge \vec{B}_- = -j k_- \vec{B}_-$$

$$(\text{Il y a changement de signe}) \quad \boxed{k_-^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \mu_0 (r+r') \omega^2 k_-}$$

$$2.5.6. \quad k_-^2 - k_+^2 = \mu_0 (r+r') \omega^2 (k_- + k_+)$$

$$\text{d'où } \boxed{k_- - k_+ = \mu_0 (r+r') \omega^2}$$

Rq: Je pense qu'il s'agit d'exprimer $k_- - k_+$ (et non $k_-^2 - k_+^2$)

Vu la différence entre k_- et k_+ cela montre que B_- et B_+ se propagent à des célérités différentes.

Si à l'entrée du milieu B_- et B_+ sont en phase, ils ne le sont plus à la sortie puisque chaque composante va à des célérités différentes.

2.5.7. Plan de symétrie $\Rightarrow$ pouvoir rotatoire identique de part et d'autre de ce plan.

Or $r \neq 0$ et $r' \neq 0$ conduisent à un pouvoir rotatoire qui s'inverse selon le sens de propagation

Un milieu à symétrie aura $r = r' = 0$