Sujet 4 — N 9,5

1) Éq^{ns} de Maxwell

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Maxwell Gauss : } \operatorname{div}\vec{E} = 0 \text{ (neutre)}\\ \text{Maxwell Flux : } \operatorname{div}\vec{B} = 0\\ \text{Maxwell Faraday : } \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\\ \text{Maxwell Ampère : } \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{array}}$$ 0,5

$$\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\operatorname{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = \vec{0} - \Delta\vec{E}$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{B}) = -\Delta\vec{E}$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = -\Delta\vec{E}$$

$$\downarrow$$

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$$

Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = \gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

0,5 $$\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

0,25 $\boxed{\text{Si } \gamma = 0 \text{ alors } \Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

0,25 on retrouve l'équation de propagation dans le vide.

2) $\boxed{\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_y}$

En notation complexe $\boxed{\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - kx)}\,\vec{e}_y}$

0,25

On injecte dans l'éq. de propagation, sachant que $\Delta\underline{\vec{E}} = -k^2\underline{\vec{E}}$

$$\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = j\omega\underline{\vec{E}}$$

cela donne : $-k^2 - \mu_0\varepsilon_0(-\omega^2) = \mu_0\gamma j\omega$

0,75 soit $\boxed{k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0\gamma\omega}$ $\quad\left(\varepsilon_0\mu_0 = \dfrac{1}{c^2}\right)$

3) $$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - j\mu_0\frac{\gamma c^2}{\omega}\right)$$

Énoncé : $\mu_0\gamma c^2/\omega \ll 1$ donc

un d.l. de $k = \pm\dfrac{\omega}{c}\left(1 - j\mu_0\dfrac{\gamma c^2}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$

donne $k \simeq \dfrac{\omega}{c}\left(1 - \dfrac{1}{2}j\mu_0\dfrac{\gamma c^2}{\omega}\right)$

Ainsi $k = k_1 - ik_2 \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$

avec $\boxed{k_1 = \dfrac{\omega}{c}}$ $\boxed{k_2 = \dfrac{1}{2}\mu_0\gamma c}$ 1

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - (k_1 - jk_2)x)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\vec{E}} = E_0 e^{-k_2 x} e^{j(\omega t - k_1 x)}\,\vec{e}_y\\ \vec{E} = E_0 e^{-k_2 x}\cos(\omega t - k_1 x)\,\vec{e}_y\end{array}}$$ 0,25 0,5

C'est une onde progressive plane car en $\cos(\omega t - kx)$ 0,25

E uniforme dans un plan d'onde $x = \text{cte}$

Vitesse de phase $\boxed{v_\varphi = \dfrac{\omega}{k_1} = c}$ 0,25

Facteur d'atténuation $\boxed{e^{-k_2 x}}$ 0,25

4) De $\vec{\operatorname{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ on a

$-j\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{B}}$ soit $(\vec{k} \parallel \vec{e}_x)$

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega} = \frac{(k_1 - ik_2)}{\omega}E_0 e^{-k_2 x} e^{j(\omega t - k_1 x)}\,\vec{e}_z}$$ 0,5

$$\boxed{\vec{B} = \frac{E_0 e^{-k_2 x}}{\omega}\left[k_1\cos(\omega t - k_1 x) + k_2\sin(\omega t - k_1 x)\right]\vec{e}_z}$$ 0,75

5) $$\boxed{\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\omega \mu_0} e^{-2k_2 x} \left[k_1 \cos^2(\omega t - k_1 x) + k_2 \sin(\omega t - k_1 x)\cos(\omega t - k_1 x) \right] \vec{e}_x}$$

0,75

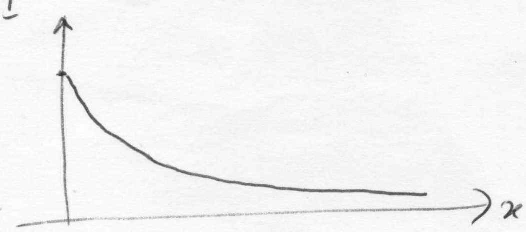
$\vec{R}$ est la puissance surfacique transportée par l'onde

0,25

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{E_0^2 k_1 e^{-2k_2 x}}{2\omega\mu_0} \vec{e}_x = \frac{E_0^2 e^{-2k_2 x}}{2\mu_0 c} \vec{e}_x = \frac{E_0^2 e^{-\mu_0 \gamma c x}}{2\mu_0 c} \vec{e}_x$$

0,5 $$\boxed{\langle R \rangle = \frac{E_0^2 e^{-\mu_0 \gamma c x}}{2\mu_0 c}}$$

6) $$\boxed{I = \langle R \rangle S = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0 c} e^{-\mu_0 \gamma c x}}$$



0,25

0,25

Longueur caractéristique d'atténuation

$$\boxed{L_c = \frac{1}{\mu_0 \gamma c}}$$

0,25

$$\frac{I(x = 1\,\mathrm{mm})}{I(x=0)} = \frac{1}{2} = e^{-\mu_0 \gamma c x_1} \implies \mu_0 \gamma c x_1 = \ln 2$$

AN $$\gamma = \frac{\ln 2}{\mu_0 c x_1} = \frac{\ln 2}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 3 \times 10^8 \times 10^{-3}} = 1{,}8 \ \mathrm{S.m^{-1}}$$

0,25
+0,25 unité

7) $\nu_0 = 2{,}83 \cdot 10^{13}$ Hz $\longrightarrow$ $\underline{\lambda_0} = \frac{c}{\nu_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{2{,}83 \cdot 10^{13}} = 1{,}03 \cdot 10^{-5}$ m

$= \underline{10{,}3\ \mu m}$

$\underline{\text{Infra-rouge}}$

0,25

0,25

$$\frac{\mu_0 c^2 \gamma}{\omega} = \frac{\mu_0 c^2}{\omega} \frac{\ln 2}{\mu_0 c x_1} = \frac{c \ln 2}{2\pi \nu_0 x_1} = \frac{3 \cdot 10^8 \ln 2}{2\pi \times 2{,}83 \cdot 10^{13} \times 10^{-3}} \simeq 10^{-3} \ll 1$$

0,5

on a bien $\frac{\mu_0 \gamma c^2}{\omega} \ll 1$

Sujet Centrale MP 01 N 115

1.a) Onde plane dans le vide : $\underline{\vec{B}_i} = \dfrac{\vec{u}_x \wedge \underline{\vec{E}_i}}{c}$

0,25

0,25 $\boxed{\underline{\vec{B}_i} = \dfrac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kx))\vec{u}_z}$

1.b)

Continuité de $\vec{E}$ en $x = 0$

0,25 Métal parfait $\boxed{\vec{E} = \vec{0},\ \vec{B} = \vec{0}}$ donc $E_{total}(x=0) = 0$

Or $E_i = E_0 \exp(i(\omega t))$ en $x = 0^-$

il faut un champ réfléchi qui assure

$E_i(x=0^-) + E_r(x=0^-) = 0 \quad \forall t$

Il faut donc E_r de m̂ pulsation ω donc de même module k que ceux de E_i. Pour la réflexion ce sera

donc $\boxed{\underline{\vec{E}_r} = -E_0 \exp(i(\omega t + kx))\vec{u}_y}$

0,75

Rq : seule la continuité de $\vec{E}$ se vérifie pour un métal parfait
il n'y a pas continuité de $\vec{B}$ pour un métal parfait.
Ce sujet (ancien) ne le précisait pas.
Dans les nouveaux programmes on doit mentionner les relations de continuité des champs

On déduit $\vec{B}_r$ avec $\underline{\vec{B}_r} = \dfrac{-\vec{u}_x \wedge \underline{\vec{E}_r}}{c}$

puisqu'attaché à une onde se propageant selon $x \searrow$ dans le vide.

d'où $\boxed{\underline{\vec{B}_r} = \dfrac{E_0}{c} \exp(i(\omega t + kx))\vec{u}_z}$

0,75

$\underline{\vec{E}}_{résultant} = \underline{\vec{E}_i} + \underline{\vec{E}_r}$

$= E_0 \left(e^{i(\omega t - kx)} - e^{i(\omega t + kx)}\right)\vec{u}_y$

$= E_0\, e^{i\omega t}(-2i \sin kx)\,\vec{u}_y$

5

$\boxed{\vec{E}_{résultant} = 2E_0 \sin kx \sin \omega t\, \vec{u}_y}$

$\underline{\vec{B}}_{résultant} = \underline{\vec{B}_i} + \underline{\vec{B}_r} = \dfrac{E_0}{c}\left(e^{i(\omega t - kx)} + e^{i(\omega t + kx)}\right)\vec{u}_z$

$\underline{\vec{B}}_{résult} = \dfrac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \cos kx\, \vec{u}_z$

$\boxed{\vec{B}_{résult} = \dfrac{2E_0}{c} \cos kx \cos \omega t\, \vec{u}_z}$ 0,75

$u = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E_{res}^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{B_{res}^2}{\mu_0}$

$u = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0\, 4E_0^2 \sin^2 kx \sin^2 \omega t + \dfrac{4E_0^2 \cos^2 kx \cos^2 \omega t}{c^2 \mu_0}$

avec $\dfrac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$

$u = 2\varepsilon_0 E_0^2 (\sin^2 kx \sin^2 \omega t + \cos^2 kx \cos^2 \omega t)$

$\boxed{\langle u \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 (\sin^2 kx + \cos^2 kx)} \boxed{= \varepsilon_0 E_0^2}$ 0,75

Comme $E_{1\,photon} = h\nu \qquad \langle u \rangle = nh\nu$

d'où $\varepsilon_0 E_0^2 = nh\nu$ soit $\boxed{n = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{h\nu}}$

0,5

Pour l'onde incidente on aurait

$\langle u_0 \rangle = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \cdot \dfrac{1}{2} = \varepsilon_0 \dfrac{E_0^2}{2}$

soit $n_0 h\nu = \varepsilon_0 \dfrac{E_0^2}{2}$ donc $\boxed{n = 2n_0}$ 0,25

1\. c) Dans le métal avec $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\text{div}\,\vec{E} = 0 \;\text{(métal neutre)} \qquad \text{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{E}) = \vec{grad}(\text{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\left(\gamma\vec{E} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\right) = -\Delta\vec{E}$$

0,75 $$\boxed{\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}} \qquad \boxed{\begin{aligned}A &= \mu_0\varepsilon_0\\ B &= \mu_0\gamma\end{aligned}}$$

Injectons la solution proposée :

$$\Delta\underline{\vec{E}} = \Delta E_y\,\vec{u}_y = \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right)\vec{u}_y$$

$$\Delta\underline{\vec{E}} = -K^2\underline{\vec{E}}$$

Ainsi $-K^2 = -\omega^2\mu_0\varepsilon_0 + i\omega\mu_0\gamma$

$$K^2 = \omega\mu_0(\omega\varepsilon_0 - i\gamma)$$

Avec $\gamma \gg \varepsilon_0\omega$ on a $\boxed{K^2 \simeq -i\omega\mu_0\gamma}$

0,75

d'où $\boxed{K = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu_0\gamma}}$ $\boxed{\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}}}$

1

(On élimine le K opposé qui conduit à une propagation en sens $x \searrow$)

0,25

A partir de $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ on a $\vec{B}$:

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}0\\ E_y\\ 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-\frac{\partial E_y}{\partial z} = 0\\ 0\\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -iKE_y\end{vmatrix}$$

donc $-iK\underline{E_y} = -i\omega\underline{B_z}$

donc $\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{K}{\omega}\underline{E_2}\,e^{i(\omega t - Kx)}\,\vec{u}_z}$

0,75

Métal non parfait (2)

incident $\underline{E_0}\,e^{i(\omega t - kx)}\,\vec{u}_y$

réfléchi $\underline{E_1}\,e^{i(\omega t + kx)}\,\vec{u}_y$

transmis $\underline{E_2}\,e^{i(\omega t - Kx)}\,\vec{u}_y$

$\longrightarrow \vec{u}_x$

Continuité de E tang en $x = 0$: $\underline{E_0} + \underline{E_1} = \underline{E_2}$

On admet la continuité de B_{tang} en $x = 0$:

$$\frac{\underline{E_0}}{c} - \frac{\underline{E_1}}{c} = \frac{\underline{K}}{\omega}\underline{E_2}$$

0,75

(Pour le B réfléchi $\vec{B_1} = \frac{-\vec{u}_x \wedge \vec{E_1}}{c} = -\frac{E_1}{c}\vec{u}_z$)

Du système on déduit $\underline{E_2} = \dfrac{2E_0}{c\left(\frac{1}{c} + \frac{K}{\omega}\right)}$

Le module de $K = \sqrt{\omega\mu_0\gamma} = \sqrt{\frac{\omega\gamma}{\varepsilon_0}}\frac{1}{c}$

donc $\left|\frac{K}{\omega}\right| = \sqrt{\frac{\gamma}{\omega\varepsilon_0}}\frac{1}{c} \gg \frac{1}{c}$ d'après hyp.

donc $\boxed{\underline{E_2} \simeq \frac{2E_0\omega}{cK} = 2E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0\omega}{\gamma}}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}$ 1

$$\underline{\vec{E_t}} = \underline{E_2}\,e^{i(\omega t - Kx)}\,\vec{u}_y = 2E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0\omega}{\gamma}}\,e^{i\left(\omega t - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu_0\gamma}\,x\right)}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\,\vec{u}_y$$

$$\boxed{\vec{E_t} = 2E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0\omega}{\gamma}}\,e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}}x}\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}}x + \frac{\pi}{4}\right)\vec{u}_y}$$

ou $\boxed{\vec{E_t} = \sqrt{2}E_0\frac{\omega}{c\alpha}\,e^{-\alpha x}\cos\left(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4}\right)\vec{u}_y}$ 0,5

Alors $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ conduit à $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{\sqrt{2}E_0\omega}{c}e^{-\alpha x}\Big[\underbrace{-\cos\left(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4}\right)}_{= 2\sin(\omega t - \alpha x)\frac{\sqrt{2}}{2}}\Big]\vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{B_t} = \frac{2E_0}{c}e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \alpha x)\,\vec{u}_z}$$ 1,5

Loi d'Ohm : $\boxed{\vec{j} = \gamma\vec{E_t} = \sqrt{2}E_0\sqrt{\varepsilon_0\omega\gamma}\,e^{-\alpha x}\cos\left(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4}\right)\vec{u}_y}$

0,25

$$\boxed{d\vec{F} = \vec{j}\,d\tau \wedge \vec{B_t}} = \vec{j}\,dS\,dx \wedge \vec{B_t}$$

$$d\vec{F} = \frac{4E_0^2}{c}\sqrt{\varepsilon_0\omega\gamma}\,e^{-2\alpha x}\cos(\omega t - \alpha x)\cos\left(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4}\right)dS\,dx\,\vec{u}_x$$ 1

moyenne temporelle $\boxed{\langle d\vec{F}\rangle = \frac{\sqrt{2}E_0^2}{c}\sqrt{\varepsilon_0\omega\gamma}\,e^{-2\alpha x}\,dS\,dx\,\vec{u}_x}$

Sur tout le métal : $\langle\vec{F}\rangle = \int_{x=0}^{\infty}\langle d\vec{F}\rangle = \frac{E_0^2\sqrt{\varepsilon_0\omega\gamma}}{c\sqrt{2}\,\alpha}dS\,\vec{u}_x$

ou $\boxed{\langle\vec{F}\rangle = E_0^2\varepsilon_0\,dS\,\vec{u}_x}$ On retrouve $p = \frac{\langle F\rangle}{dS} = \varepsilon_0 E_0^2$ 1

même pour toute valeur de γ. 0,25