Mines Ponts PC 16 /14,25

Sujet 1

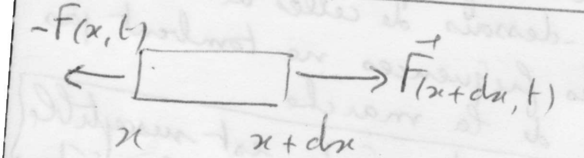
10) $F = ES\dfrac{\Delta L}{L} \Rightarrow E \sim \dfrac{F}{S} \sim$ pression

0,5 E en Pa

11) L'abscisse $x+dx$ se déplace de $X(x+dx)$
l'abscisse x se déplace de $X(x)$
L'allongement relatif de $[x ; x+dx]$
est donc $\dfrac{X(x+dx)-X(x)}{dx} = \dfrac{\partial X}{\partial x}$

0,5

Alors $\boxed{\vec{F}(x,t) = ES\dfrac{\partial X}{\partial x}\vec{u}_x}$



PFD à cette tranche :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = ES\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x+dx} - ES\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_x$$

$$\Rightarrow \rho dx \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}dx$$

0,75 $\Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \dfrac{\rho}{E}\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0}$

12) PFD à $(x ; x+dx)$ de la corde.
0,25

0,25 $\mu dl \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u}_y = \vec{T}(x+dx,t) - \vec{T}(x,t)$
0,25
(déplacement horiz négligé) (poids négligé)

Proj° sur $\vec{u}_x$: $0 = d(T\cos\alpha)$ (a)

Proj° sur $\vec{u}_y$: $\mu dl \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = d(T\sin\alpha)$ (b)

(a) $\Rightarrow T\cos\alpha = $ cte
avec $\alpha \ll 1$ $\cos\alpha \simeq 1$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{T = \text{cte} = T_0}$

13) (b) avec $dl = \sqrt{dx^2+dy^2} \simeq dx$
car $dy \ll dx$
25

$\mu dx \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 d\sin\alpha \simeq T_0 d(\tan\alpha)$

$= T_0 d\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right) = T_0 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$

$\rightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{T_0}{\mu}\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c_0^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$

14) Injecter $f(x)g(t)$ ds l'équation
$\rightarrow \rho S f(x)\ddot{g} + IE f''''(x)g(t) = 0$
La solution proposée est de type stationnaire puisqu'espace et temps sont découplés.
Les ondes stationnaires apparaissent si le milieu est limité (conditions limites à observer)
0,25

15) Divisons par fg :

$$\underbrace{\rho S \frac{\ddot{g}(t)}{g(t)}}_{\text{ne dépend que de } t} = \underbrace{-IE\frac{f''''(x)}{f(x)}}_{\text{ne dépend que de } x} = \text{cte} \quad 0,25$$

0,25

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \rho S \ddot{g}(t) - \text{cte}\, g(t) = 0 & (a) \\ f''''(x) + \dfrac{\text{cte}}{IE}f(x) = 0 & (b) \end{array}}$

$g(t)$ ne peut être une solution exponentielle divergente donc cte < 0 et g vérifie l'équation d'un oscillateur harmonique 0,25

$\ddot{g} + \omega^2 g = 0$ $\left(\dfrac{\text{cte}}{\rho S} = -\omega^2\right)$

La solution d'une équa. diff. du 2^nd ordre entraîne 2 constantes. 0,25
Celle d'une équa. diff du 4^e ordre entraîne 4 constantes. 0,25
Quand on fait le produit fg, on peut factoriser ensemble 2 de ces constantes
cela fait donc 5 constantes au total pour $y = fg$ 0,25

$(A'\cos\omega t + B'\sin\omega t)(A\cos\beta x + B\sin\beta x + C\text{ch}\beta x + D\text{sh}\beta x)$
peut s'écrire $(\cos\omega t + B''\sin\omega t)(A''\cos\beta x + B''\sin\beta x + C''\text{ch}\beta x + D''\text{sh}\beta x)$

16) Injectons la solution proposée ds (b) :

$+A\beta^4\cos\beta x + B\beta^4\sin\beta x + C\beta^4\text{ch}\beta x + D\beta^4\text{sh}\beta x$
$- \dfrac{\omega^2\rho S}{IE}(A\cos\beta x + B\sin\beta x + C\text{ch}\beta x + D\text{sh}\beta x) = 0$

soit $\beta^4 f(x) - \dfrac{\omega^2\rho S}{IE}f(x) = 0$ 0,75

Il faut que $\beta^4 = \dfrac{\omega^2\rho S}{IE}$ soit $\boxed{\beta = \sqrt{\omega}\left(\dfrac{\rho S}{IE}\right)^{\frac{1}{4}}}$

17) C.L $y_{x=0} = 0 \Rightarrow f(x=0) = 0 \Rightarrow \boxed{A + C = 0}$ 0,5

$y_{x=L} = 0 \Rightarrow f(x=L) = 0 \Rightarrow \boxed{A\cos\beta L + B\sin\beta L - A\text{ch}\beta L + D\text{sh}\beta L = 0}$ 0,25

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow f''(x=0) = 0 \Rightarrow -A\beta^2 - A\beta^2 = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0}$

$\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=L} = 0 \Rightarrow -B\beta^2 \sin\beta L + D\beta^2 \mathrm{sh}\,\beta L = 0$

0,25 soit $\boxed{-B\sin\beta L + D\,\mathrm{sh}\,\beta L = 0}$

Les 4 relations combinées mènent à :

$$\begin{cases} B\sin\beta L = D\,\mathrm{sh}\,\beta L \\ B\sin\beta L = -D\,\mathrm{sh}\,\beta L \end{cases}$$

On ne peut pas avoir $B = D = 0$

On n'a pas $\mathrm{sh}\,\beta L = 0$ car $\beta = 0$ donne $\omega = 0$

Il ne reste que la solution $\begin{cases} D = 0 \\ \sin\beta L = 0 \end{cases}$

0,5

$\sin\beta L = 0 \Rightarrow \beta L = n\pi$ n entier

d'où $\sqrt{\omega_n} = n\frac{\pi}{L}\left(\frac{IE}{\rho S}\right)^{\frac{1}{4}}$

0,25

ou $\boxed{\omega_n = n^2 \frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{IE}{\rho S}}}$

18) L'étude théorique porte uniquement sur $y(x,t)$ càd les vibrations transverses en fonction de l'abscisse longitudinale du pont. Aucune étude théorique en ce qui concerne ces vibrations en fonction de l'abscisse transverse du pont.

Donc les modes de la figure 6 correspondant à l'étude théorique précédente sont a, c, e, f

0,5

Mode a : fondamental (1 seul max) $\frac{1}{2}$ période spatiale $n = 1$

0,25

Mode c : harmonique $n = 2$ (1 période spatiale)

0,25 Mode e : harmonique $n = 3$ ($1 + \frac{1}{2}$ période)

0,25 Mode f : harmonique $n = 4$ (2 périodes)

19) On a vu que la marche correspond à une fréquence de 2 Hz (fondamental) puis avec des harmoniques 4, 6, 8, 10, 12 Hz

Calcul de $I = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \times 1{,}07^3}{12} = 0{,}41\ m^3$

Calcul de $\frac{IE}{\rho S} = \frac{0{,}41 \times 69.10^9}{2700 \times 1{,}07 \times 4} = 2{,}4.10^6$ SI

$\sqrt{\frac{IE}{\rho S}} = 1{,}6.10^3$ SI

$\pi^2 \sqrt{\frac{IE}{\rho S}} = 1{,}5.10^4$ SI

L	$L_1 = 70$ m	$L_2 = 144$ m	$L_3 = 108$ m
$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$	0,5 Hz	0,11 Hz	0,2 Hz
$f_2 = 4f_1$	2 Hz	0,5 Hz	0,8 Hz
$f_3 = 9f_1$	4,5 Hz	1 Hz	1,9 Hz
$f_4 = 16f_1$	8 Hz	1,8 Hz	3,4 Hz

On constate que l'harmonique 2 (mode c) correspond à la fréquence fondamentale de la marche pour $L_1 = 70$ m

De m̂ L_1 possède une harmonique (8 Hz) de la marche

Pour L_2 : aucune fréquence (elles sont trop basses, en-dessous de celles de la marche)

Pour L_3, les fréquences ne tombent pas sur celles de la marche.

Donc seule la travée L_1 est susceptible d'entrer en résonance avec les piétons

2

Vibrations latérales ? En adaptant le m̂ modèle à l'abscisse latérale alors il faut modifier :

$\boxed{I' = \frac{1}{12} h^3 L}$ et $\boxed{S = hL}$

L	$L_1 = 70$ m	$L_2 = 144$	$L_3 = 108$ m
I'	7,1	14,7	11
S	74,9	154	115
f_1	0,5	0,1	0,2
$f_2 = 4f_1$	2	0,5	0,8
$f_3 = 9f_1$	4,5	1	1,9

On remarque là aussi que la travée L_1 a comme harmonique $n = 2$ (mode c) la fréquence fondamentale de la marche

Pas de remarques particulières pour les autres travées.

On verra donc des excitations résonantes latérales sur la travée L_1

Centrale PSI 2015 Sujet 2 N/6,

Sujet 2

Flexion dans un solide

1) a) Pour une corde souple, $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0}$ avec $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ ← tension ← masse linéique

0,25

0,25 c'est l'équation de D'Alembert

0,5 solution : $\boxed{z = f(x-ct) + g(x+ct)}$

1)c) $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^4} \sim \dfrac{L}{L^4}$ et $\gamma^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} \sim \gamma^2 \dfrac{L}{t^2}$ d'où $\dfrac{L}{L^4} \sim \gamma^2 \dfrac{L}{t^2}$ soit $\boxed{\gamma \sim \dfrac{t}{L^2}}$ γ est en $s.m^{-2}$

0,75

1)d) Pour se propager il faut Reel $\underline{k} \neq 0$; pour aller vers $x \nearrow$ il faut Reel $\underline{k} > 0$

0,25

0,25

1)e) Injectons z dans (III 1) : $(-jk)^4 + \gamma^2 (j\omega)^2 = 0$ d'où $\underline{k}^4 = \gamma^2 \omega^2$

d'où $k^2 = \gamma\omega$ soit $k = \sqrt{\gamma\omega}$

1,5 Ainsi $\boxed{v_\varphi \doteq \dfrac{\omega}{k} = \sqrt{\dfrac{\omega}{\gamma}}}$ v_φ dépend de ω : le milieu est donc dispersif.

1)f) La barre est limitée et fixée aux 2 extrémités. Il y a donc réflexion

0,25 et superposition de 2 ondes progressives en sens inverse ce qui donne lieu à une onde stationnaire

2)a) Pour qu'une onde progressive puisse se propager le long d'un anneau il faut retrouver la même valeur de z et même variation (ou tangente)

0,75 au bout d'un tour de longueur L soit $\boxed{L = n\lambda \text{ avec } n \in \mathbb{N}}$

$z(0,t) = z(L,t)$

$\dfrac{dz}{ds}(0,t) = \dfrac{dz}{ds}(L,t)$

0,25 Si il s'agissait d'une onde stationnaire il faudrait $\boxed{L = n\dfrac{\lambda}{2}}$ $n \in \mathbb{N}$

2)b) $\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{c}{f} \\ L = n\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow f = n\dfrac{c}{L} \Rightarrow \boxed{\omega = \dfrac{2\pi n c}{L}} \Rightarrow \boxed{k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi n}{L}}$

0,5

ω et k sont quantifiés

0,5

rappel $c = v_\varphi = \sqrt{\dfrac{\omega}{\gamma}} \rightarrow \omega = \dfrac{2\pi n}{L}\sqrt{\dfrac{\omega}{\gamma}} \rightarrow \boxed{\omega = \dfrac{4\pi^2 n^2}{\gamma L^2}}$

Sujet 3 Mines-Ponts 18

12) $\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \text{(plasma globalement neutre } \rho = 0) \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$

PFD à l'électron soumis à force électrique, force magnétique négligée car é non-relativiste (et poids négligé)

$m\dot{\vec{v}} = -e\vec{E}$

en régime permanent sinusoïdal : $\dot{\vec{v}} = i\omega\vec{v}$ $\Rightarrow i m\omega \vec{v} = -e\vec{E}$ $\Rightarrow \vec{v} = -\dfrac{e}{im\omega}\vec{E}$

1 Densité de courant (en négligeant le mouvement des cations quasi-inertes)

$\vec{j} = n(-e)\vec{v} = \dfrac{ne^2}{im\omega}\vec{E}$

Loi d'Ohm $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ $\Bigg\} \rightarrow \boxed{\gamma = \dfrac{ne^2}{im\omega}}$

Équation de propagation : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E}$

$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = 0 - \Delta\vec{E}$

0,75 $-\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = -\Delta\vec{E} \rightarrow \boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\dfrac{\partial\vec{j}}{\partial t} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

Relation de dispersion on injecte $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$ $\rightarrow -k^2\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0(-\omega^2)\vec{E} = \mu_0\gamma i\omega\vec{E}$

0,5
0,25 d'où $\boxed{k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma\omega = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\mu_0 ne^2}{m} = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$ avec $\boxed{\omega_p^2 = \dfrac{\mu_0 c^2 ne^2}{m} = \dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$

Propagation possible si $k^2 > 0$ pour avoir une solution réelle de k

soit $\omega > \omega_p$

Propagation impossible si $\omega < \omega_p$ càd $\omega^2 < \dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}$, soit pour $n > \dfrac{m\varepsilon_0\omega^2}{e^2}$

0,25 $\boxed{\text{Soit } n_c = \dfrac{m\varepsilon_0\omega^2}{e^2} \text{ la propagation devient impossible dès que } n > n_c}$

0,25 L'onde se réfléchit alors sur le plasma.

13) $n_e = n_{max} e^{x/L}$

L'onde se réfléchit si $n_e > n_c$ càd si $n_{max} e^{x/L} > \dfrac{m\varepsilon_0\omega^2}{e^2}$

càd si $x > L \ln\left(\dfrac{m\varepsilon_0\omega^2}{n_{max} e^2}\right)$

La valeur limite d'abscisse est donc $\boxed{x_c = L \ln\left(\dfrac{m\varepsilon_0\omega^2}{n_{max} e^2}\right)}$

0,5