Centrale PC10

IA1a) Enoncé : $F = ES\dfrac{\delta l}{l_0}$ où $\delta l$ représente l'allongement de la longueur $l_0$.

Pour un morceau de longueur $dx$ situé entre $[x \quad x+dx]$ l'allongement est $\xi(x+dx) - \xi(x)$ c.à.d $\dfrac{\partial \xi}{\partial x}dx$. Ainsi $F = \dfrac{ES}{dx}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}dx$

$$\boxed{F = Ehb\frac{\partial \xi}{\partial x}}$$ (la section $S = hb$)

IA1b) TCI au morceau $[x \quad x+dx]$

$$F(x+dx) - F(x) = dm\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$Ehb\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx = \rho hb\, dx\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0}$$ D'Alembert $\boxed{c_l = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}}$

IA2) $\xi(x,t) = f(x)g(t)$ sur D'Alembert :

$$g(t)f''(x) - \frac{1}{c_l^2}f(x)\ddot{g}(t) = 0$$

$$\rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{\ddot{g}(t)}{c_l^2 g(t)}$$ ne peut être que constant puisque fonction de $x$ à gauche fonction de $t$ à droite

Enoncé : "recherche de solutions sinusoïdales"

$$\rightarrow \boxed{g(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

d'où $f''(x) + \dfrac{\omega^2}{c_l^2}f(x) = 0$

soit $\boxed{f(x) = B\cos\dfrac{\omega}{c_l}x + C\sin\dfrac{\omega}{c_l}x}$

Pulsation spatiale $\boxed{k = \dfrac{\omega}{c_l}}$

A3) Enoncé : $F = 0$ en $x = 0$ et en $x = L$

soit $\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ soit $f'(x) = 0$ en $x = 0$ et $L$

d'où $C = 0$ et $\sin\dfrac{\omega L}{c_l} = 0$

$\dfrac{\omega L}{c_l} = n\pi \quad n \in \mathbb{N}$ ou $\boxed{kL = n\pi}$

$\omega = 2\pi f \qquad \boxed{f_n = \dfrac{n c_l}{2L}} \quad n \in \mathbb{N}$

IA4) Calcul de $c_l = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{19{,}5.10^{10}}{7.8.10^3}} = 5000\ \text{m.s}^{-1}$

$f_n = n\dfrac{5000}{2\times 0{,}243} = n \cdot 10\,290$ Hz $\quad n \geq 1$

Impossible d'obtenir 785 Hz