

Sujet 1

$$\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

reg. stationnaire $\Rightarrow \rho \neq \rho(t) \Rightarrow \text{div } \vec{J} = 0$ ce qui signifie que le flux de $\vec{J}$ est conservé dans un tube de courant, c'est le courant d'intensité I se conserve.

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \quad \text{Loi d'ohm locale} \quad \text{div } \vec{J} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{E} = 0$$

Comme $\vec{J} \parallel \vec{e}_z$, $\vec{E}$ aussi donc $\vec{E} = E \vec{e}_z$
 $\text{div } \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \Rightarrow E$ indépendant de z
 $\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

$$\left. \begin{array}{l} J = \gamma E \\ J = \frac{I}{\pi r^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{I}{\pi r^2} = -\gamma \frac{(V_A - V_B)}{l}$$

$$V_A - V_B = \frac{l}{\gamma \pi r^2} I$$

En régime stationnaire, I se conserve

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$I_{\text{radial}} \Rightarrow J_{\text{radial}} : I = J \times l \times 2\pi r \Rightarrow J(r) = \frac{I}{2\pi r l}$$

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\gamma} \Rightarrow E(r) = \frac{I}{2\pi r l \gamma}$$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{I}{2\pi r l \gamma} \vec{u}_r \cdot d\vec{r} = -\frac{I}{2\pi r l \gamma} \vec{r} \cdot d\vec{r} = -\frac{I}{2\pi r l \gamma} r dr$$

$$\Rightarrow dV = -\frac{I}{2\pi r l \gamma} dr \Rightarrow V_B - V_A = -\frac{I}{2\pi l \gamma} \ln \frac{a_2}{a_1}$$

$$V_A - V_B = \frac{I}{2\pi l \gamma} \ln \frac{a_2}{a_1}$$

Sujet 2

Conservation de l'énergie mécanique

$$E_m(t=0) = E_m(t)$$

$$\frac{1}{2} m u^2(t=0) - eV(t=0) = \frac{1}{2} m u^2 - eV$$

null null (t=0 inconnu)

$$\Rightarrow u = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

$$\vec{J} = n(-e) \vec{u} \Rightarrow \vec{J} = -ne u \vec{e}_x$$

Eq. Poisson (reg. stationnaire, pas de propagation) $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

$$\rho = -ne$$

$$\Delta V - \frac{ne}{\epsilon_0} = 0$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} - \frac{ne}{\epsilon_0} = 0$$

$$n = -\frac{J_x}{e} = -\frac{J}{e} \sqrt{\frac{m}{2eV}}$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{J}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} V^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\alpha = \frac{|J|}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}$$

$$\alpha = \frac{J}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \quad x > 0$$

$$5) \quad \frac{d^2 V}{dx^2} = \alpha V^{-\frac{1}{2}}$$

(2)

$$V'' \cdot V' = \alpha V^{-\frac{1}{2}} V' \quad \text{ou} \quad V' = \frac{dV}{dx}$$

$$\text{Intégrer: } \left[\frac{1}{2} V'^2 \right] = \left[2\alpha V^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\text{ou } E = -V' = 0 \text{ à } x=0 \\ V = 0 \text{ à } x=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} V'^2 = 2\alpha V^{\frac{1}{2}} \\ V'^2 = 4\alpha V^{\frac{1}{2}}$$

$$V' = 2\sqrt{\alpha} V^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{dV}{V^{\frac{1}{4}}} = 2\sqrt{\alpha} dx \Rightarrow \frac{4}{3} V^{\frac{3}{4}} = 2\sqrt{\alpha} x + C$$

$$V^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \sqrt{\alpha} x + C$$

$$V = 0 \text{ à } x = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$V = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{4}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}}$$

$$\text{Vérification: } E = -V' = -\frac{4}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{4}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} \\ \text{on a bien } E(x=0) = 0$$

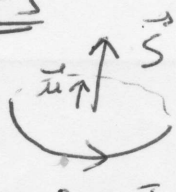
6)

$$\text{cf 8) } \alpha = -\frac{J}{e} \sqrt{\frac{m}{2e}} \quad (J < 0)$$

$$V_0 = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{4}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}} a^{\frac{4}{3}}$$

$$V_0^{\frac{3}{4}} \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{3}} = -\frac{J}{e_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}$$

$$V_0 = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{4}{3}} a^{\frac{4}{3}} \left(\frac{J}{e_0} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{m}{2e} \right)^{\frac{1}{3}} \\ (J < 0)$$

Sujet 3

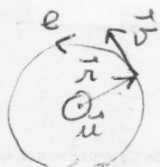
$$\vec{m} = I \vec{S} = I \pi r^2 \vec{u}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{m} = \frac{e v r}{2} \vec{u}}$$

$$\text{Or } I = \frac{e}{T} = \frac{e}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{e \omega}{2\pi} = \frac{e v}{2\pi r}$$

($v = r\omega$ mouvement circulaire)

$$\boxed{\vec{J} = \pi r \vec{u} \wedge \vec{v}}$$



comme $\vec{u} \perp \vec{v}$ $\boxed{\vec{J} = \pi r \wedge v \vec{u}}$

$$3) \vec{m} = \gamma \vec{J} \text{ ou } m = \gamma J \text{ soit } \frac{e v r}{2} \vec{u} = \gamma \pi r \wedge v \vec{u}$$

$$\Downarrow$$

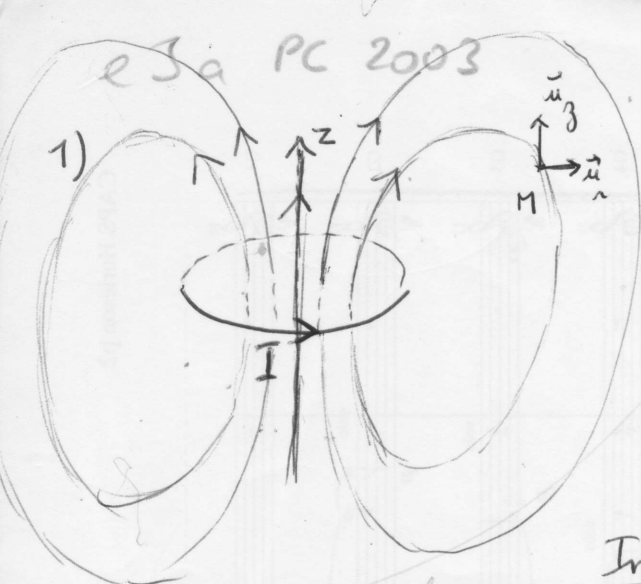
$$\boxed{\gamma = \frac{e}{2\pi r}}$$

$$4) \text{ AN } \gamma = \frac{1,6 \times 10^{-19}}{2 \times 1,6 \times 10^{-27}} = 0,5 \times 10^8 \text{ C.kg}^{-1}$$

$$5) \text{ Etat } J = \frac{h}{4\pi} \rightarrow \begin{cases} E_p^+ = -m \cdot B_0 = -\gamma J B_0 = -\gamma \frac{h}{4\pi} B_0 \\ J = -\frac{h}{4\pi} \rightarrow E_p^- = -m B_0 = -\gamma J B_0 = +\gamma \frac{h}{4\pi} B_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E = E_p^- - E_p^+ = \frac{\gamma h B_0}{2\pi}}$$

6) Stern et Gerlach : dans un champ magnétique, les spins se séparent (2 directions possibles) : spin et spin opposés.



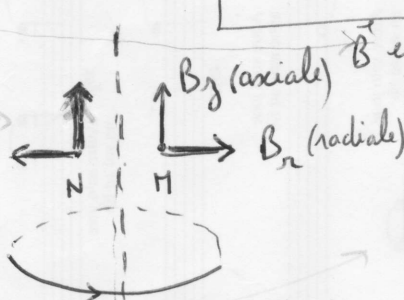
Symétrie : le plan passant par l'axe et un point M est d'antisymétrie par le courant I

→ $\vec{B} \parallel$ ce plan

donc $\vec{B} \in (\vec{u}_r, \vec{u}_z)$

Invariance : I est invariant selon θ
donc $B(r, \theta, z)$

Résumé : $\vec{B} = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_z(r, z) \vec{u}_z$



$\vec{B}$ est symétrique / plan d'antisymétrie :

B_r est impaire par rapport à r
 B_z est paire par rapport à r

I ← plan d'antisymétrie pour le courant

2) Expressions avec B_r impaire :
 B_z pair :

$$\begin{cases} B_r(r, z) = \alpha(z) r I \\ B_z(r, z) = f(z) I \end{cases}$$

Eq locale de cons de $\Phi(B)$: $\text{div } \vec{B} = 0$

$$\text{soit } \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{1}{r} \alpha(z) 2r + f'(z) = 0$$

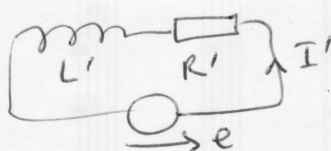
$$\rightarrow \alpha(z) = -\frac{1}{2} f'(z)$$

3) $\Phi(\vec{B}, c') = \int_{z(0,y)} B_z \pi b^2 = f(z) I \pi b^2$

$\vec{B}' = \pi b^2 \vec{e}_z$

4) Loi de Faraday : c' est le siège d'une tension induite
 $e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -f(z) \pi b^2 \frac{\partial I}{\partial t}$

schéma électrique de la spire (c')

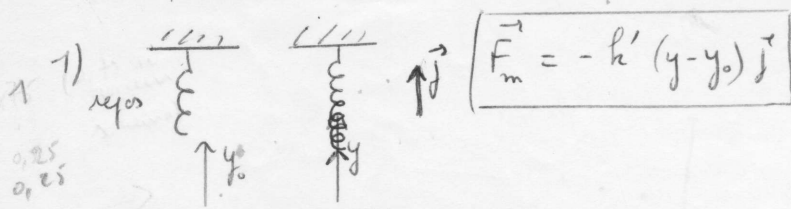


$$e = L' \frac{dI'}{dt} + R' I'$$

$$-f(z) \pi b^2 \frac{dI}{dt} = L' \frac{dI'}{dt} + R' I'$$

Supraconducteur : $R' = 0 \rightarrow -f(z) \pi b^2 \frac{dI}{dt} = L' \frac{dI'}{dt}$

Intégrer : $-f(z) \pi b^2 I_0 = L' I'_0$



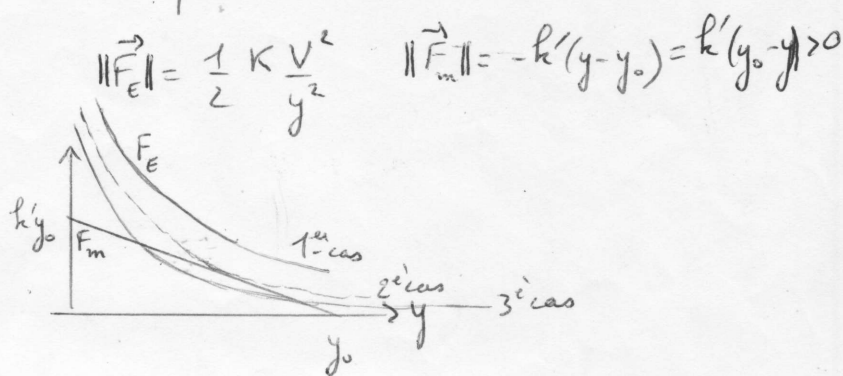
si $y = y_0$ alors $F_m = 0$ (repos)
 si $y > y_0$ alors $F_m > 0$ (ressort allongé de y_0
 donc tension vers le haut)

2) Equil $\vec{F}_E + \vec{F}_m = \vec{0} \rightarrow F_{Ey} = k'(y - y_0)$ algébrique

Comme il y a attraction électrostatique, $y < y_0$ donc $\vec{F}_m \uparrow$ sens de $\vec{j}$
 soit $y_0 - y > 0$ donc $\vec{F}_E \downarrow$ opposé à $\vec{j}$

$\rightarrow \|\vec{F}_{Eeq}\| = \|\vec{F}_{m,eq}\| = k'(y_0 - y)$ équil.

- 3) 1^{er} cas F_E toujours $> F_m$
 2^e cas F_E tangent à F_m en 1 point
 3^e cas F_E coupe F_m



4) a) 1 seule position d'équil $\rightarrow$ 2^e cas

les tangentes sont égales en 1 point $\rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{dF_m}{dy} = \frac{dF_E}{dy} \\ F_m = F_E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -k' = -\frac{K V^2}{y^3} \\ -k'(y_{eq} - y_0) = \frac{1}{2} \frac{K V^2}{y_{eq}^2} \end{cases}$$

$\rightarrow y_{eq} = \frac{2}{3} y_0$ et $V = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{k'}{K}}$

Stabilité? si $y > y_{eq}$ alors $F_E \downarrow > F_m \uparrow$ (cf courbe) on repasse par y_{eq}
 mais si $y < y_{eq}$ alors $F_E \downarrow > F_m \uparrow$ on s'éloigne de $y_{eq} \Rightarrow$ instable

b) si $0 < V < V_1$ alors F_E a une ordonnée + faible au point $\frac{2}{3} y_0 (= y_{eq})$

$\rightarrow$ il y a donc coupure de F_E avec $F_m \rightarrow$ 3^e cas $\rightarrow$ 2 positions d'équil

par le point y le + petit, si $y \downarrow$ $F_E > F_m$ et $y \downarrow$ encore $\rightarrow$ instable
 grand, si $y \downarrow$ $F_E < F_m$ et $y \uparrow$
 si $y \uparrow$ $F_E > F_m$ et $y \downarrow$ $\rightarrow$ stable

5) Pour $V = 100$ V, $V = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{k'}{K}} \rightarrow k' = K \times \frac{3}{2} \times \frac{9}{4} \frac{V^2}{y_0^3}$

$k' = 9 \cdot 10^{-16} \times \frac{3}{2} \times \frac{9}{4} \times \frac{100^2}{3^3 \cdot 10^{-9}} = 1,13 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$

Par l'énergie

$dE_{\text{pot}} = -\left(-\frac{K V^2}{y^2}\right) dy = \frac{1}{2} \frac{K V^2}{y^2} dy$

Ainsi

0,25

$$1) \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{on néglige le poids})$$

1

$$\Rightarrow m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = q B_0 v_y \\ m \ddot{y} = -q B_0 v_x \\ m \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

2) on dérive 1 et on remplace $\dot{y}$ grâce à 2

$$\rightarrow m \ddot{x} = q B_0 \left(-\frac{q B_0}{m} \right) x$$

0,75

$$\rightarrow \ddot{x} + \omega_c^2 x = 0$$

3) Intégrer : $x = A_1 \cos \omega_c t + A_2 \sin \omega_c t$

$$\text{Cond. init. : } A_1 = x_1$$

$$1 \rightarrow m \omega_c (-A_1 \sin \omega_c t + A_2 \cos \omega_c t) = q B_0 v_y$$

$$\text{Cond. init. : } m \omega_c A_2 = q B_0 \times 0 \rightarrow A_2 = 0$$

$$\Rightarrow x = x_1 \cos \omega_c t$$

$$2 \rightarrow \frac{y}{q B_0} = \frac{m}{q B_0} \dot{x} = \frac{m}{q B_0} x_1 (-\omega_c) \sin \omega_c t$$

$$y = -x_1 \sin(\omega_c t)$$

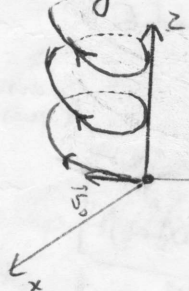
$$3 \rightarrow z = z_{||}$$

4) Intégrer avec les conditions initiales

$$x = \frac{x_1}{\omega_c} \sin \omega_c t = \rho_L \sin \omega_c t$$

$$y = -\frac{x_1}{\omega_c} [\cos \omega_c t - 1] = \rho_L [\cos \omega_c t - 1]$$

$$z = z_{||} t$$

5) Trajectoire hélicoïdale autour de Oz

y n'est jamais positif strictement

$A t > 0$ x 1 d'abord

$$6) \text{ AN } \rho_L = \frac{x_1}{\omega_c}$$

$$e : \omega_{ce} = \frac{e B_0}{m_e} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 2,5}{9,11 \cdot 10^{-31}} = 4,39 \cdot 10^{11} \text{ rad s}^{-1}$$

$$\rho_L = \frac{x_1}{\omega_c} = \left(\frac{2 \times 10 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}} \right) \cdot \frac{9,11 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 2,5}$$

$$\rightarrow \rho_L = \sqrt[10]{\frac{9,11 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19}}} \times \frac{1}{2,5} = 4,27 \mu\text{m}$$