1) $\boxed{V_{q_1} = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

2) $\boxed{W_{12} = q_2 V_{q_1} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 L}}$

3) Analogie élec-grav

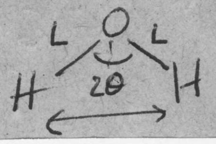
$\boxed{W_{grav,12} = -\mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{L}}$

$$\eta = \left|\frac{W_{12}}{W_{grav\,12}}\right| = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \mathcal{G} m_1 m_2}$$

$$\eta \sim \frac{1{,}6.10^{-19} \times 2\times 1{,}6\times 10^{-19}}{4\pi \times 8{,}8\times 10^{-12} \times 6{,}7\times 10^{-11} \times 1{,}7\times 10^{-27} \times 2{,}7\times 10^{-26}} \sim \frac{1{,}6\times 2\times 1{,}6 \times 10^{-7} \times 10^{8} \times 10^{26}}{4\pi \times 8{,}8 \times 6{,}7 \times 1{,}7 \times 2{,}7}$$

$\eta \sim 1{,}5.10^{35} \gg 1$ Il est donc inutile de prendre en compte la gravitation

4) $W_{HH} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$ $d = 2L\sin\theta$




$\boxed{W_{HH} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \times 2L\sin\theta}}$

$\boxed{W_{OH} = \dfrac{-2e^2}{4\pi\varepsilon_0 L}}$

5) $W_{HH} > 0$ car il y a répulsion entre les 2 $H^+$

$W_{OH} < 0$ ——— attraction entre $H^+$ et $O^{2-}$

En effet la stabilité tend vers l'énergie minimale

6) $W = W_{HH} + 2W_{OH}$ le 2 vient du fait que il y a 2 liaisons OH

A l'équilibre on a un minimum de $\boxed{W = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\dfrac{1}{2\sin\theta} - 4\right)}$

$\dfrac{1}{2\sin\theta} - 4$ est min quand $\sin\theta$ est max soit

donc pour $\boxed{\theta = \dfrac{\pi}{2}}$

Si on calcule $\dfrac{d^2W}{d\theta^2} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{-\cos\theta}{2\sin^2\theta}\right) = \dfrac{e^2}{2\times 4\pi\varepsilon_0 \times}\dfrac{(+\sin^3\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta)}{\sin^4\theta} > 0$ en $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

équilibre stable

On explique cette valeur $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ qui correspond à un écart max entre les 2 $H^+$ pour minimiser leur énergie potentielle (qui est positive)

H — O — H

7) On attend $2\theta_0 = 104°$ ce qui contredit le résultat précédent

8) 

$q$ répartie dans sphère de rayon $R$

L'analyse de symétrie (révol$^t$ sphérique) conduit à $\vec{E}$ radial et les invariances de la charge par rapport à $\theta$ et $\varphi$ conduisent à $E(r)$. Résumé : $\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r$

Th de Gauss / surface fermée = sphère rayon $r < R$ (en pointillés)

$$\oiint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \longrightarrow E \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{q r^3}{\varepsilon_0 R^3}$$

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{q\, r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{u}_r = \frac{q\,\vec{OM}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}}$$

9) $$\boxed{\vec{F}_{-q} = -q\,\vec{E}_1 = -\frac{q^2\,\vec{OM}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}}$$

Position d'équilibre quand $\vec{F}_{-q} = \vec{0}$ soit $M = O$ $\boxed{\vec{r}_{eq} = \vec{0}}$

Si $-q$ se déplace, la force $\vec{F}_{-q}$ tend à ramener $-q$ puisqu'elle est centripète. L'équilibre est donc stable.

10) Cette fois, $-q$ est soumis à 2 forces : $-q(\vec{E}_1 + \vec{E}_0)$

L'équilibre est obtenu quand elles s'éliminent : $\vec{E}_1 + \vec{E}_0 = \vec{0}$

d'où $-q^2\frac{\vec{r}'_{eq}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} - q\vec{E}_0 = \vec{0}$ $$\boxed{\vec{r}'_{eq} = -\frac{\vec{E}_0\, 4\pi\varepsilon_0 R^3}{q}}$$ $(q = e)$

11) Ce déplacement mène à

$\vec{r}'_{eq}$ ← $q$

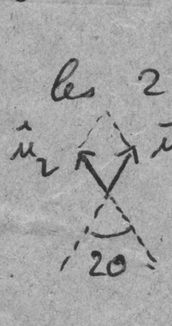
d'où un dipôle de moment $-q$ barycentre positif (proton) $\longrightarrow \vec{E}_0$

$$\boxed{\vec{P}_i = q(-\vec{r}'_{eq}) = 4\pi\varepsilon_0 R^3\vec{E}_0}$$

$$\vec{P}_i = \varepsilon_0\alpha_{pol}\vec{E}_0 \longrightarrow \boxed{\alpha_{pol} = 4\pi R^3}$$

12) $\vec{\mathcal{E}}_0$ créé par les 2$H^+$ en O : $\vec{\mathcal{E}}_0 = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 L^2}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$

$\vec{u}_z$ ↑



$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = 2\cos\theta\,\vec{u}_z$

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}}_0 = \frac{2e\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\vec{u}_z}$$

13) $W_{Tot} = W + W' = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{2\sin\theta} - 2\times 2\right) - \vec{p}_i \cdot \frac{\mathcal{E}_0}{2}$

$$W_{Tot} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{\sin\theta} - 8\right) - \frac{4\pi\varepsilon_0 R^3 \mathcal{E}_0^2}{2}$$

$$= \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{\sin\theta} - 8\right) - \frac{4\pi\varepsilon_0 R^3}{2}\,\frac{4e^2\cos^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 L^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0 L^2}$$

$$W_{Tot} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{\sin\theta} - 8 - \frac{4R^3\cos^2\theta}{L^3}\right)$$

$$\boxed{W_{Tot} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 L}\left(-8 + \frac{1}{\sin\theta} - \frac{4R^3}{L^3}\cos^2\theta\right)}$$

$$\boxed{A_1 = -8 \quad A_2 = 1 \quad A_3 = -\frac{4R^3}{L^3}}$$

14) Position d'équil par $\frac{dW_{Tot}}{d\theta} = 0$ ; $-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{4R^3}{L^3} \cdot 2\cos\theta\sin\theta = 0$

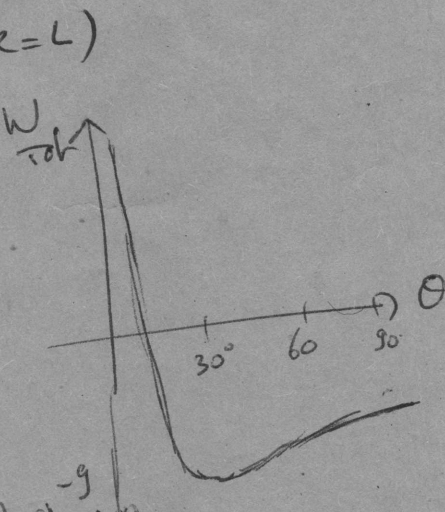
soit $\left(8\frac{R^3}{L^3}\sin^3\theta - 1\right)\cos\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = 0 & \theta = \frac{\pi}{2} \\ \sin\theta = \frac{L}{2R} \end{cases}$

AN $\sin\theta = \frac{10^{-10}}{2\times 10^{-10}} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = 30°$

(peu satisfaisant)

15) $W_{Tot}(\theta) = \text{cte}\left(-8 + \frac{1}{\sin\theta} - 4\cos^2\theta\right)$ (car $R = L$)

| $\theta$ | 0 | 30° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|
| | $\infty$ | $-9$ | $\underbrace{-10 + \frac{2}{\sqrt{3}}}_{<-7}$ | $-7$ |




16) Impossible d'avoir $\theta = 0$ car les 2 $H^+$ seraient l'un sur l'autre alors qu'ils se repoussent d'où $W_{Tot}(\theta=0) \rightarrow \infty$

A $\theta = 30°$ les 2 $H^+$ se repoussent mais sont attirés par $O^{2-}$ : équilibre stable

Cependant la valeur reste en deçà de la réalité.