Mines-Ponts PC 2021 sujet 1

1) $p_0 = 10^5$ Pa pression normale
$T_0 = 20°C$ t° ambiante

loi du GP : $p_0 V = nRT_0$
volume molaire $\frac{V}{n}$ $\Rightarrow \boxed{\frac{V}{n} = \frac{RT_0}{p_0}}$

AN : $\frac{V}{n} = \frac{8,3 \times (273+20)}{10^5} \simeq \frac{8 \times 300}{10^5}$

$\rightarrow$ $\frac{V}{n} = \underline{0,24 \cdot 10^{-1} \ m^3/mol}$

$\rightarrow$ avec 1 seul chiffre significatif $\frac{V}{n} = 0,3 \cdot 10^{-1} \ m^3/mol$

Le volume d'une mole de molécules en propre est $N_A \frac{4}{3}\pi R_m^3$

Le rapport $\frac{\text{Volume occupé par les sphères}}{\text{Volume du récipient}} = \frac{N_A \frac{4}{3}\pi R_m^3}{\frac{V}{n}}$

AN $\frac{V_{sphère}}{V_{récipient}} = \frac{6 \times 10^{23} \times \frac{4\pi}{3} \times (100 \times 10^{-12})^3}{0,3 \times 10^{-1}}$

$= \frac{8 \times \pi}{0,3} \cdot \frac{10^{23} \times 10^{-30}}{10^{-1}}$

$\boxed{\frac{V_{sphère}}{V_{récipient}} = 8 \times 10^{-5}}$

2) Déf. G.P : gaz sans interaction intermoléculaire
Les molécules occupant un volume $8 \cdot 10^{-5}$ fois celui du récipient, on peut considérer à juste titre que les interactions entre molécules sont très très petites donc négligeables. On peut donc adopter le modèle du G.P. dans la suite.

3) $E_{c_m} = \frac{3}{2} kT$

$E_{p_m} = m_m g z$

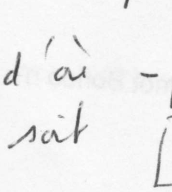
Le rapport $\frac{E_{pm}}{E_{cm}} = \frac{m_m g z}{\frac{3}{2} kT} \simeq \frac{M g z}{N_A \frac{3}{2} kT}$

$\frac{E_{pm}}{E_{cm}} \simeq \frac{30 \times 10^{-3} \times 9,8 \times 1}{6 \cdot 10^{23} \times \frac{3}{2} \times 1,4 \cdot 10^{-23} \times 300}$

$\simeq \frac{3 \times 10}{1,2 \times 3} \times \frac{10^{-3}}{10^3} \simeq 10^{-5}$ (à $z = 1$m)

A des hauteurs raisonnables de laboratoire, $E_{pm} \ll E_{cm}$
Il n'y a donc pas de "dépôt" de molécules au fond du récipient.

4) $p(z)$ comme dit dans l'énoncé.
G.P : $pV = nRT$ donc $\boxed{\rho = \frac{pM}{RT}}$
déf : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V}$
Du coup si p dépend de z alors ρ aussi.



morceau de fluide de surface S horizontale, entre z et $z+dz$

équilibre $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ $\rightarrow \vec{F}'_p + \vec{F}_p + \vec{P} = \vec{0}$

avec $\vec{F}'_p = -p(z+dz) S \vec{e}_z$
$\vec{F}_p = +p(z) S \vec{e}_z$
$\vec{P} = \rho g S dz (-\vec{e}_z)$

d'où $-p(z+dz) + p(z) - \rho g dz = 0$

soit $\boxed{dp = -\rho g dz}$

5) Avec $\rho = \frac{pM}{RT}$ $\quad dp = -\frac{pMg dz}{RT}$

ici $T = T_0$ isotherme donc $\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0} dz$

Intégrons : $\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{RT_0} z$

soit $p = p_0 e^{-\frac{Mgz}{RT_0}}$

En posant $\boxed{H = \frac{RT_0}{Mg}}$ $\rightarrow \boxed{\frac{p}{p_0} = A(z)}$
$\left(A(z) \stackrel{\text{déf}}{=} e^{-\frac{z}{H}}\right)$

$\frac{R}{M} = \frac{k}{m_m}$ (car $R = kN_A$ et $M = m_m N_A$)

donc $\boxed{H = \frac{kT_0}{m_m g}}$

AN : $H \simeq \frac{1,4 \cdot 10^{-23} \times 300}{\frac{30 \times 10^{-3}}{6 \cdot 10^{23}} \times 9,8}$

$\underline{H} \sim 8 \times 10^{2-1+3-1} \sim \underline{8 \text{ km}}$

Dans un récipient de quelques mètres de hauteur

$$\frac{p(h)}{p_0} \sim A(h) = e^{-\frac{h}{H}} \sim e^{-\frac{1}{8000}} \sim 1$$

Un manomètre usuel de labo ne détecte absolument pas la différence de pression.

Si le récipient était rempli d'eau liquide, on aurait $\rho = C^{ste}$

$dp = -\rho g\, dz$ donnerait l'intégration $p(h) - p_0 = -\rho g h$

sur 1m $\rho g h \sim \underbrace{10^3}_{eau} \times \underbrace{10}_{g} \times \underbrace{1}_{h} \sim 10^4$ Pa

ce qui représente $\frac{1}{10} p_0$

Un manomètre usuel est précis au millibar près donc peut largement détecter cette différence ($\frac{1}{10} p_0 \sim 100$ mbar)

6) $A(z) = e^{-\frac{z}{H}} = e^{-\frac{z\, m_m g}{kT_0}} = e^{-\frac{E(z)}{kT_0}}$

d'où $\boxed{E(z) = m_m g z}$ représente l'énergie potentielle de pesanteur d'une molécule

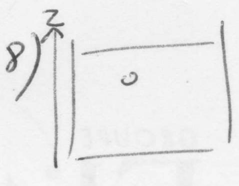
Interprétation : à des valeurs de kT_0 très grandes devant $E(z)$, rien de visible se passe

à des valeurs de kT_0 de l'ordre de ou inférieures à $E(z)$, une distribution non uniforme de particules se "voit" avec raréfaction quand on monte.

7) Concentration $c_g(z) = \frac{n}{V} = \frac{p}{RT_0}$

$\boxed{c_{g0} = \frac{p_0}{RT_0}}$ (concentration au sol)

donc $\boxed{\frac{c_g(z)}{c_{g0}} = \frac{p(z)}{p_0} = A(z)}$ (OK)

8) 

Poids du grain
Force d'Archimède
Force de viscosité

9) PFD au grain de masse volumique μ_b

$$g(-\mu_b V_b + \mu_e V_b)\vec{e}_z - \alpha \vec{v} = m_b \dot{\vec{v}}$$

$$-\mu_b V_b g + \mu_e V_b g + \alpha v = -m_b \dot{v}$$

$$\boxed{\dot{v} + \frac{\alpha}{m_b} v = (\mu_b - \mu_e)\frac{V_b g}{m_b}}$$

Régime permanent $\Rightarrow \dot{v} = 0$

donc $\boxed{v_\ell = (\mu_b - \mu_e)\frac{V_b g}{\alpha}}$

$v_\ell = \frac{m^* g}{\alpha}$ avec $\boxed{m^* = (\mu_b - \mu_e) V_b}$

m^* masse apparente càd masse de la bille (ou grain) allégée de l'effet poussée d'Archimède.

$\boxed{\tau = \frac{m_b}{\alpha}}$ d'après $\dot{v} + \frac{\alpha}{m_b} v$

odg : lire énoncé + haut

$\alpha = 6\pi\eta R_b$ $\quad \mu_e = 10^3$ kg/m^3

$R_b = 0{,}2\ \mu m$

$V_b = 3{,}4 \cdot 10^{-20}\ m^3$ $\quad m_b = 4{,}1 \cdot 10^{-17}$ kg

$\eta = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ Pa.s

$\mu_b = 1{,}2\ 10^3$ kg/m^3

d'où $v_\ell \simeq (1{,}2 - 1)\, 10^3 \frac{3{,}4 \cdot 10^{-20} \times 9{,}8}{6\pi \times 1{,}2 \cdot 10^{-3} \times 0{,}2\, 10^{-6}}$

$$v_\ell = \frac{0{,}2 \times 3{,}4 \times 9{,}8}{6\pi \times 1{,}2 \times 0{,}2} \cdot 10^{3-20+3+6}$$

$$v_\ell \simeq \frac{9{,}8}{7{,}2} \cdot 10^{-8} \simeq 10^{-8}\ m/s$$

$$\tau = \frac{4{,}1 \cdot 10^{-17}}{6\pi \times 1{,}2 \cdot 10^{-3} \times 0{,}2 \times 10^{-6}} = \frac{4{,}1 \times 10^{-17+3+6}}{6\pi \times 1{,}2 \times 0{,}2}$$

$\tau \simeq 10^{-8}$ s $\quad \tau \simeq 10$ ns

10)

10) $j \sim c v \sim \frac{mol}{[L]^3}\frac{[L]}{[t]}$

$\underline{j \text{ est en } mol\, m^{-2} s^{-1}}$

$[j] \sim \frac{[c][D]}{[L]}$ (loi Fick)

donc $[D] \sim \frac{[j][L]}{[c]} \sim \frac{[mol][L][L]^3}{[L]^2[t][mol]}$

soit $\underline{D \text{ en } m^2 s^{-1}}$

Equilibre : $\boxed{\vec{j}_c + \vec{j}_n = \vec{0}}$

d'où $-c v_\ell - \frac{dc}{dz} D = 0$

ou encore $\boxed{\frac{dc}{dz} + \frac{v_\ell}{D} c = 0}$

Integration $\boxed{c = c_0 e^{-\frac{v_\ell}{D} z}}$

$\boxed{c = c_0 A(z) \quad \text{avec } H_b = \frac{D}{v_\ell}}$

avec v_ℓ trouvé en 9) càd $v_\ell = \frac{m^* g}{\alpha}$

on obtient $H_b = \frac{D\alpha}{m^* g}$

mais $\alpha = 6\pi\eta R_b$ (énoncé page 1)

ce fait $\boxed{H_b = \frac{D 6\pi\eta R_b}{m^* g}}$

11) $\boxed{E_p^*(z) = m^* g z}$

$A(z) = \exp\left[-\frac{E_p^*}{k_B T_0}\right] = \exp\left[-\frac{m^* g z}{k_B T_0}\right]$

à identifier à $\exp\left[-\frac{z}{H_b}\right]$

$\Rightarrow \boxed{H_b = \frac{k_B T_0}{m^* g}}$ d'où $\frac{D 6\pi\eta R_b}{m^* g} = \frac{k_B T_0}{m^* g}$

soit $\boxed{D = \frac{k_B T_0}{6\pi\eta R_b}}$

12) Récipient suffisamment grand contenant N grains sur une hauteur h_1, section S

donc à partir de $c = c_0 e^{-\frac{z}{H_b}}$

on déduit, avec la définition de

$c = \frac{dN}{S dz}$ où dN est le nombre entre z et $z+dz$

$dN = c_0 S\, dz\, e^{-\frac{z}{H_b}}$

d'où $N = \int_0^\infty c_0 S e^{-\frac{z}{H_b}} dz$

$= c_0 S \left[\frac{e^{-\frac{z}{H_b}}}{-\frac{1}{H_b}}\right]_0^\infty$

$N = c_0 S H_b \longrightarrow \boxed{c_0 = \frac{N}{S H_b}}$

13) $\begin{cases} c : \text{nb de ~~grains~~ /volume (cf déf question 9)} \\ n : \text{nb moyen de grains dans l'épaisseur } e \end{cases}$

$\Downarrow$

$\boxed{c = \frac{n}{Se}}$

Le tracé de Jean Perrin est $\ln n / z$

$\ln(n) = \ln(cSe) = \ln c + \ln(Se)$

avec $c = c_0 e^{-\frac{z}{H_b}}$

$\ln(n) = \ln c_0 - \frac{z}{H_b} + \ln(Se)$

soit $\ln(n) = \underbrace{-\frac{z}{H_b} + \ln(c_0 Se)}_{\text{fonction affine de } z \text{ de pente } -\frac{1}{H_b}}$

on lit sur le tracé de Jean Perrin :

$|\text{pente}| = \frac{4{,}8 - 2{,}3}{100} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \mu m^{-1}$ (2,4)

(en fait la pente est donnée sur le graphe !)

d'où $H_b = \frac{1}{2{,}5 \cdot 10^{-2} \times 10^6}$ en mètre

$\underline{H_b = 0{,}4 \cdot 10^{-4}\ m = 40\ \mu m}$

La hauteur $h_1 = 100\ \mu m$ utilisée par Jean Perrin est limite mais acceptable : $\exp\left(-\frac{h_1}{H_b}\right) = \exp\left(-\frac{100}{40}\right) \simeq \frac{1}{10}$

14) de $H_b = 40\ \mu m$ on peut déduire k_B car $H_b = \frac{k_B T_0}{m^* g}$ (cf(1))

sachant que $m^* = (\rho_b - \rho_e) V_b$
$= m_b - \rho_e V_b$
$= 4{,}1.10^{-17} - 10^3 . 3{,}4.10^{-20}$

$\underline{m^*} = (4{,}1 - 3{,}4)\, 10^{-17} = \underline{0{,}7 . 10^{-17}\ kg}$

$k_B = \frac{H_b m^* g}{T_0} \simeq \frac{40 \times 10^{-6} \times 0{,}7 \times 10^{-17} \times 10}{300}$

$k_B \sim 10^{-6-17+1-1} \sim 1.10^{-23}$ SI

C'est l'odg ($k_B = 1{,}4.10^{-23}$ SI)

Causes d'erreurs expérimentales :
- le comptage des particules
- la mesure de l'épaisseur e des tranches de comptage
- la mesure de T_0
- la mesure de m_b et V_b

15) PFD à la particule de masse m_b

$$\boxed{m_b \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_c - \alpha \vec{v}}$$ (pesanteur négligée)

si $\vec{F}_c = \vec{0}$ alors $m_b \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \vec{v}$

ce qui s'intègre en $\vec{v} = \vec{v}_0\, e^{-\frac{\alpha}{m_b} t}$

donc une perte de vitesse avec un temps caractéristique $\tau = \frac{m_b}{\alpha}$ calculé en 9) à 10 ns donc atténuation très rapide

16) $\frac{d(xv)}{dt} = v \frac{dx}{dt} + x \frac{dv}{dt} = v^2 + x \frac{dv}{dt}$

donc $\boxed{x \frac{dv}{dt} = \frac{d(xv)}{dt} - v^2}$

17) $\boxed{u \stackrel{\vee}{=} \sqrt{\langle v^2 \rangle}}$

$m_b u^2 = m_b \langle v^2 \rangle$ représente le double de l'énergie cinétique moyenne d'agitation
$k_B T_0$ représente le double de l'énergie d'agitation thermique (équipartition de l'énergie : on attribue $\frac{1}{2} k_B T$ à chaque degré de liberté)

18) $m_b \frac{dv}{dt} = F_c - \alpha v$ (étude selon $\vec{e}_x$) ④

Multiplions par x :
$m_b\, x \frac{dv}{dt} = x F_c - \alpha\, x v$

Moyennons : $m_b \langle x \frac{dv}{dt} \rangle = \langle x F_c \rangle - \alpha \langle x v \rangle$

Enoncé : $\langle x F_c \rangle = 0$

Qu. 16 $\rightarrow$ $x \frac{dv}{dt} = \frac{d(xv)}{dt} - v^2$ donc $\langle x \frac{dv}{dt} \rangle = \langle \frac{d xv}{dt} \rangle - \langle v^2 \rangle$

Enoncé : $\langle \frac{d(xv)}{dt} \rangle = \frac{d\varphi}{dt}$

d'où $m_b \left(\frac{d\varphi}{dt} - \langle v^2 \rangle \right) = -\alpha \langle x v \rangle$

Enoncé : $\varphi \stackrel{\vee}{=} \langle x v \rangle$

d'où $\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\alpha}{m_b} \varphi = \langle v^2 \rangle = u^2 = \frac{k_B T_0}{m_b}$

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\alpha}{m_b} \varphi = \frac{k_B T_0}{m_b}}$$

Intégrons : $\varphi = A\, e^{-\frac{\alpha t}{m_b}} + \frac{k_B T_0}{\alpha}$

A $t = 0$ $\quad 0 = A + \frac{k_B T_0}{\alpha}$

donc $\boxed{\varphi = \frac{k_B T_0}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m_b} t} \right)}$

19) $\varphi \stackrel{\vee}{=} \langle x v \rangle = \langle x \frac{dx}{dt} \rangle = \langle \frac{d}{dt} \frac{x^2}{2} \rangle$
$= \frac{1}{2} \langle \frac{d}{dt} x^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle \stackrel{\vee}{=} \frac{1}{2} \frac{d\psi}{dt}$

↑ hyp. ergodique énoncé

Ainsi $\boxed{\varphi = \frac{1}{2} \frac{d\psi}{dt}}$

$\psi - \psi_0 = 2 \int_0^t \varphi\, dt = 2 \int_0^t \frac{k_B T_0}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m_b} t} \right) dt$

$\psi - \psi_0 = \frac{2 k_B T_0}{\alpha} \left[t - \frac{e^{-\frac{\alpha}{m_b} t}}{-\frac{\alpha}{m_b}} \right]_0^t$

$\psi - \psi_0 = \frac{2 k_B T_0}{\alpha} \left(t + \frac{m_b}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{m_b} t} \right)$

or on a calculé $\tau = \frac{m_b}{\alpha} = 10\ ns$ en 9)

on peut donc considérer que à des temps $t > 100\ ns$, $t \gg \frac{m_b}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{m_b} t}$

Ainsi $\psi - \psi_0 \simeq \frac{2 k_B T_0}{\alpha} t$

Que vaut φ_0 ?
On peut considérer qu'à $t=0$ $x=0$ et alors $\varphi_0 = 0$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \varphi(t) = \dfrac{2k_BT_0}{\alpha} t = D_x t \\ D_x = \dfrac{2k_BT_0}{\alpha} \end{array}}$$

20) Le tracé représente $\langle x^2 \rangle = \varphi$ en fonction du temps.
La pente en est donc D_x
Calcul pente $= \dfrac{180}{120} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2} = 1,5$ $\mu m^2/s$

ainsi $D_x = \dfrac{2k_BT_0}{\alpha} = 1,5$ $\mu m^2/s$

d'où $k_B = \dfrac{1,5 \times 10^{-6} \times 10^{-6}}{2 \times (273+20)} \cdot \alpha$

avec $\alpha = 6\pi\eta R_b = 6\pi \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} \times 0,2 \times 10^{-6}$

$\alpha \simeq$

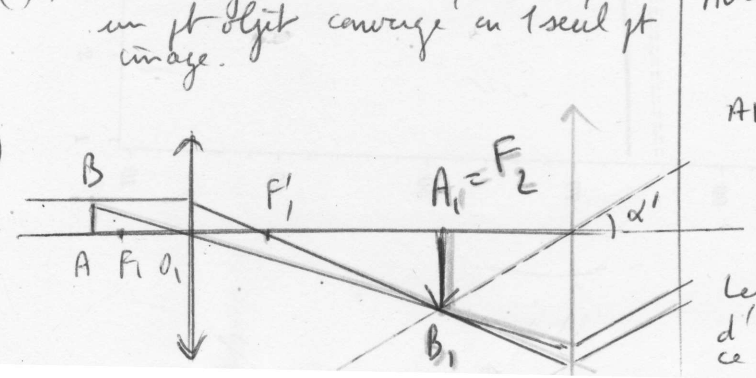
$k_B = \dfrac{1,5 \times 6\pi \times 1,2 \times 0,2}{2 \times 293 \times} \cdot 10^{-21}$

$k_B \simeq 2\pi \times 1,5 \times 1,2 \times 10^{-24}$
$= 3 \times 1,2\,\pi \times 10^{-24}$
$k_B = 1,1 \cdot 10^{-23}$ SI

Sans calculette, c'est difficile de comparer les 2 résultats de k_B. Ils sont en tout cas proches du k_B connu.

21) Conditions de Gauss : angles faibles des rayons / axe
ce qui implique : l'aplanétisme (a)
le stigmatisme (b)
(a) : tout objet plan ⊥ axe donne image ⊥ axe
(b) : tout rayon incident passant par un pt objet converge en 1 seul pt image.

22)



A_2B_2 à l'∞ $\Rightarrow$ A_1B_1 dans le plan focal objet de l'oculaire, càd $A_1 = F_2$ (5)
J'utilise la propriété : des rayons issus d'un même pt du plan focal objet (ici de l'oculaire) ressortent // entre eux.

23) Formules de conjugaison à l'objectif :
$\dfrac{1}{\overline{O_1A_1}} - \dfrac{1}{\overline{O_1A}} = \dfrac{1}{f'_1}$

ici $\overline{O_1A_1} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1F_2} = f'_1 + \Delta$

donc $\dfrac{1}{\overline{O_1A}} = \dfrac{1}{f'_1+\Delta} - \dfrac{1}{f'_1} = \dfrac{-\Delta}{f'_1(f'_1+\Delta)}$

Avec $\Delta = 15$ cm et $f'_1 = 1$ mm : $\Delta \gg f'_1$
$\dfrac{\Delta}{f'_1+\Delta} \simeq 1$ et $\dfrac{1}{\overline{O_1A}} \simeq -\dfrac{1}{f'_1}$
soit $\overline{O_1A} \simeq -f'_1$ donc $A \simeq F_1$

$\dfrac{1}{\overline{O_1A}} = -\dfrac{\Delta}{f'_1(f'_1+\Delta)} \Rightarrow |O_1A| = \dfrac{f'_1(f'_1+\Delta)}{\Delta} > f'_1$

donc A est bien en amont de F_1
(sinon l'objectif servirait de loupe ce qui n'est pas souhaité)
Pour un observateur de vision sans défaut, observer à l'∞ ne le fatigue pas
L'image intermédiaire A_1B_1 doit être dans le plan focal ~~objet~~ de l'oculaire.

Si $\overline{AF_1} < 0$, alors l'objectif est loupe et l'image intermédiaire serait avant l'objectif, du même côté que A.

24) D'après la fig. de 22)
$\tan\alpha' = \dfrac{A_1B_1}{f'_2}$ et $\dfrac{AB}{f'_1} = \dfrac{A_1B_1}{\Delta}$

donc $\tan\alpha' = \dfrac{\Delta}{f'_1} \dfrac{AB}{f'_2}$

Avec $\alpha' \ll 1$ $\boxed{P_i = \dfrac{\alpha'}{AB} = \dfrac{\Delta}{f'_1 f'_2}}$

AN $P_i = \dfrac{0,15}{10^{-3} \cdot 2 \times 10^{-2}} = 7,5 \times 10^3$ m^{-1}
$= 7500$ δ

Ainsi $\alpha' = P_i\, AB$
Les grains ont un diamètre de $R_b = 0,2$ µm
d'où $\alpha' = 7500 \times 0,2 \times 10^{-6} = 1,5 \cdot 10^{-3}$ rad
ce qui est suffisant pour la résolution d'1 oeil : 1/60 de degrés > 1 mrad