I - Propriétés générales de la trajectoire

Un satellite artificiel, S, assimilable à point matériel de masse m, évolue librement à grande distance de la Terre. La Terre est considérée comme un corps immobile, rigoureusement sphérique et homogène, de rayon R, de masse M et de centre O.
On désigne par $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{OS}$, le vecteur position du satellite et par $\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}} = d\boldsymbol{r}/dt$ son vecteur vitesse.
A l'instant initial $t = 0$, le satellite se trouve dans la position $\boldsymbol{r}_0$, animé de la vitesse $\boldsymbol{v}_0$, non radiale.

L'influence de la Lune, du Soleil, des autres planètes, ainsi que celle de l'atmosphère sont ignorées.
On étudie la situation pour $t > 0$.

1.1. Donner l'expression vectorielle du champ de force $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ auquel est soumis le satellite.
– On désignera par G la constante de gravitation universelle et par $\boldsymbol{u}$ le vecteur unitaire radial –.
S'agit-il d'un champ de force central ?

1.2. Définir le vecteur moment cinétique $\boldsymbol{J}$ du satellite, par rapport au centre O.

1.3. Montrer que, quel que soit $t \geq 0$, le moment cinétique $\boldsymbol{J}$ du satellite est constant, égal à une valeur $\boldsymbol{J}_0$. Expliciter $\boldsymbol{J}_0$.

1.4. Justifier le fait que la trajectoire suivie par le satellite, pour $t \geq 0$, est entièrement contenue dans un plan fixe $\mathcal{P}$, que l'on précisera.

II - Etude du mouvement plan. Aspects dynamiques et énergie

On reprend les hypothèses de la section **I** ci-dessus, en se plaçant dans le plan $\mathcal{P}$ de la trajectoire. Ce plan est rapporté aux coordonnées polaires (r, θ), de centre O et de base locale $\{\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_\theta\}$.
– $\boldsymbol{u}_r$ et $\boldsymbol{u}_\theta$ sont respectivement le vecteur unitaire radial et le vecteur unitaire orthoradial –.

2.1. Montrer que le principe fondamental de la dynamique, appliqué au satellite, conduit à l'équation différentielle :

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

2.2. Déduire de l'équation différentielle précédente que le mouvement du satellite vérifie une relation de la forme : $r^n\dot{\theta} = C = \text{cste}$.
Déterminer l'exposant n, et relier la constante C au moment cinétique, J, du satellite par rapport au centre de la Terre et à sa masse m.

2.3. Exprimer l'aire, dA, balayée par le rayon-vecteur $\boldsymbol{r}$ durant l'intervalle de temps dt.
Montrer que l'aire ΔA balayée par le rayon-vecteur durant un intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$ est proportionnelle à Δt, le facteur de proportionnalité α étant le même quel que soit $t_1 \geq 0$ (*seconde loi de Kepler*). Pour cela, on identifiera le facteur α.

On note respectivement $U(r)$ et $K(r)$ l'énergie potentielle et l'énergie cinétique du satellite dans la position courante $\boldsymbol{r}$, et respectivement U_0 et K_0 ces mêmes énergies à l'instant initial.

2.4. En adoptant la convention : $U = 0$ à l'infini, justifier physiquement le fait que l'énergie potentielle de gravitation $U(r)$ est négative quelle que soit la distance r, finie.

2.5. Partant de la position $\boldsymbol{r}$, le satellite effectue un déplacement élémentaire $d\boldsymbol{r}$ le long de sa trajectoire.
Relier les variations $dU(r)$ et $dK(r)$ de l'énergie potentielle et cinétique observées au cours de ce déplacement, au champ de force $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$.
De quelle propriété jouit la somme : $E(r) = U(r) + K(r)$?

2.6. A quelle condition liant U_0 et K_0, le satellite reste-t-il en orbite autour de la Terre (état lié) ?
Quelle est alors la nature de la trajectoire suivie par le satellite ?
– On donnera ces deux résultats sans les démontrer –.

III - Satellite géostationnaire

La Terre tourne sur elle-même, autour de sa ligne des pôles, à la vitesse angulaire Ω. On ne considère pas son mouvement de révolution autour du Soleil.

Le satellite évolue maintenant de façon géostationnaire[1], c'est-à-dire qu'il tourne de façon synchrone avec la Terre sur une orbite circulaire de rayon a_1, située dans le plan équatorial.

3.1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique au satellite, déterminer l'expression du rayon a_1 de l'orbite géostationnaire, en fonction de G, M et Ω.

3.2. Donner l'expression de l'énergie potentielle de gravitation $U(r)$ du satellite, lorsqu'il se situe à une distance r, quelconque, du centre de la Terre.
On exprimera $U(r)$ en fonction de G, M, m et r, en retenant la condition : $U = 0$ à l'infini.

3.3. Exprimer l'énergie mécanique totale E_T du satellite sur son orbite géostationnaire, en fonction de G, M, m et a_1.

[1] « géostationnaire » signifie immobile pour un observateur terrestre.

3.4. Le satellite a été lancé à partir d'une base terrestre située sur l'équateur (Kourou [Guyane]).
Déterminer l'énergie minimale, W_L, qu'il a fallu dépenser pour le placer sur orbite géostationnaire.
– On ne tient pas compte ici des frottements dans l'atmosphère, pas plus que de l'énergie dépensée pour propulser la fusée porteuse, hors satellite –.

3.5. Exprimer la différence, ΔW_L, entre l'énergie minimale de lancement sur orbite géostationnaire à partir d'une base équatoriale et à partir d'une base située à la latitude géographique $\lambda \neq 0$.
Est-il, sur le plan énergétique, préférable d'effectuer les lancements depuis la base de Kourou ($\lambda \approx 0$) ou du Cap Canaveral [Floride] ($\lambda \approx 25°$ N) ?

ATS 99

A.1.1. $\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\dfrac{G M m}{r^2}\,\vec{u}}$ force centrale

A.1.2. $\vec{J} = m\,\vec{OS}\wedge\vec{v}$

A.1.3. $\dfrac{d\vec{J}}{dt} = m\underbrace{\dfrac{d\vec{OS}}{dt}}_{\vec{v}}\wedge\vec{v} + m\,\vec{OS}\wedge\vec{a} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{J} = \text{constante}$ $\quad \vec{J}_0 = m\vec{r}_0\wedge\vec{v}_0$

$\vec{F}\,//\,\vec{OS}$

A.1.4. $m\vec{r}\wedge\vec{v} = \vec{cte} \Rightarrow \vec{r}\perp\vec{cte}$ ou $\vec{OS}\perp\vec{cte}$, O fixe $\Rightarrow$ S dans le plan contenant O et $\perp$ à $\vec{J}_0$

A.2.1. $\vec{F} = m\vec{a} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$
$\vec{F}\,//\,\vec{u}_r$
$\Rightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$ ou $\boxed{r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0}$

A.2.2. $r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = \dfrac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} \Rightarrow 0 = \dfrac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} \rightarrow r^2\dot{\theta} = C \quad (n=2)$

$\vec{r}\begin{vmatrix} r \\ 0\end{vmatrix}_{u_r, u_\theta} \quad \vec{v}\begin{vmatrix}\dot{r} \\ r\dot{\theta}\end{vmatrix}_{u_r,u_\theta} \longrightarrow \vec{r}\wedge\vec{v}\begin{vmatrix}0\\0\\r^2\dot{\theta}\end{vmatrix}_{\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{k}}$ $\quad \boxed{C = \dfrac{J}{m}}$

A.2.3 $\boxed{dA = \frac{1}{2} r\times r\,d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r^2\dot{\theta}\,dt = \frac{1}{2} C\,dt}$

$r\,d\theta$, r

$\Delta A = \frac{1}{2} C\,\Delta t \qquad \alpha = \frac{1}{2} C$

A.2.4. $E_p \searrow$ dans le sens du mouvement spontané de S initialement au repos.
Comme S est naturellement attiré vers O, $E_p \nearrow$ si $r\nearrow$
Donc $E_p(r) \leq E_p(\infty)$ Or $E_p(\infty) = 0$ par convention, donc $\boxed{E_p(r) \leq 0}$

A.2.5. Par déf^n: $dU \overset{\wedge}{=} -\vec{F}\cdot d\vec{r} \overset{\text{TEC}}{=} -dK$ si $\vec{F}$ est la seule force subie par S

$d(U+K) = 0 \longrightarrow dE = 0 \qquad E = \text{const}$

A.2.6. Etat lié $E \leq 0$

d'où condition $\boxed{U_0 + K_0 \leq 0}$ traj. elliptique (paraboliques si E=...

A.3.1. $-\dfrac{G M m}{a_1^2} = -m a_1\Omega^2$ (géostat ; $\omega_{Sat} = \Omega_{Terre}$) $\quad \boxed{a_1 = \left(\dfrac{GM}{\Omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$

A.3.2 $\boxed{U(r) = -\dfrac{G M m}{r}}$

A.3.3. $\boxed{E_T = \underbrace{\frac{1}{2} m a_1^2\Omega^2}_{E_c} - \frac{G M m}{a_1} = -\frac{G M m}{2a_1}}$

On remarque que :
$\boxed{\Omega^2 = 2\dfrac{G M m}{2a_1^3 m} = \dfrac{GM}{a_1^3}}$

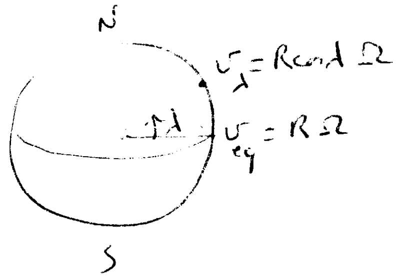
A 3 4. $\underline{\text{T.EM}}$ $W_L = E_{s\ \text{sur orbite}} - E_{s\ \text{au lancement sur Terre}}$

$$= -\frac{G M m}{2a_1} - \left(\frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{R}\right)$$

Avec $v = R\Omega$ à l'équateur soit $v^2 = R^2\Omega^2 = R^2 \dfrac{GM}{a_1^3}$

$$\boxed{W_L = -\frac{G M m}{2a_1} - \frac{1}{2} m \frac{G M R^2}{a_1^3} + \frac{G M m}{R}}$$

A 3 5



$$W_{L\,\text{équateur}} = -\frac{G M m}{2a_1} - \frac{1}{2} m v_{\text{équateur}}^2 + \frac{G M m}{R}$$

$$W_{L\,\lambda} = -\frac{G M m}{2a_1} - \frac{1}{2} m v_\lambda^2 + \frac{G M m}{R}$$

$$\Rightarrow \Delta W_L \stackrel{\vee}{=} W_{L\,\text{équateur}} - W_{L\,\lambda} = \frac{1}{2} m \left(v_\lambda^2 - v_{\text{équateur}}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} m R^2\Omega^2(\cos^2\lambda - 1) = -\frac{1}{2} m R^2\Omega^2 \sin^2\lambda$$

$$\boxed{\Delta W_L = -\frac{1}{2} m R^2 \frac{GM}{a_1^3} \sin^2\lambda}$$

Il est préférable de lancer à partir de l'<u>équateur</u> (<u>Kourou</u>)