1 Généralités

Toute la compréhension des filtres passifs (sans ampli-op) est basée sur les trois impédances complexes:

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega} \qquad Z_R = R \qquad Z_L = jL\omega$$

Z_C est proportionnelle à ω ; Z_R n'en dépend pas , et Z_L lui est proportionnelle .

Ainsi, à TBF, $|Z_C| >> |Z_R| >> |Z_L|$ et à THF, $|Z_C| << |Z_R| << |Z_L|$. On en conclut :

Un filtre **passe-bas** s'obtient aux bornes de **C** d'un circuit RC ou RLC
Un filtre **passe-bas** s'obtient aux bornes de **R** d'un circuit RL
Un filtre **passe-haut** s'obtient aux bornes de **R** d'un circuit RC.
Un filtre **passe-haut** s'obtient aux bornes de **L** d'un circuit RL ou RLC
Un filtre **passe-bande** s'obtient aux bornes de **R** d'un circuit RLC

Les impédances **complexes** nous renseignent sur le déphasage de la tension par rapport à l'intensité.

Z_C est proportionnel à $-j$, Z_R est réel positif et Z_L est proportionnel à j; d'après la loi d'Ohm complexe $u = Zi$, cela implique que la tension u_C est en retard de $\pi/2$ par rapport à i (qui traverse C), que u_R est en phase avec i (qui traverse R), et que u_L est en avance de $\pi/2$ par rapport à i (qui traverse L) .

Ainsi dans une même ligne de circuit , donc parcourue par le même courant i on en déduit que :

u_L est en avance de $\pi/2$ par rapport à u_R , elle -même en avance de $\pi/2$ par rapportà u_C

Dans la suite $v_e = V_e \cos\omega t$ et $v_s = V_s \cos(\omega t + \varphi)$

En notation complexe : $v_e = V_e\ e^{j\omega t}$ et $v_s = V_s\ e^{j(\omega t+\varphi)}$. Il s'ensuit que :

$\varphi > 0$ correspond à v_s en avance par rapport à v_e

2 Rappels sur les filtres d'ordre 1

Ils ne comportent que 2 types d'éléments: (R, L), ou (R, C).

2.1 Formes canoniques

Compte-tenu de ce qui a été mentionné dans les généralités, un filtre passe-bas du premier ordre s'obtient aux bornes de C d'un circuit RC série ou bien aux bornes de R d'un circuit RL série.

La fonction de transfert s'écrit:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \qquad avec\ \omega_0 = \frac{R}{L}\ \ ou\ \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Les asymptotes TBF et THF se coupent en ω_0. La pente est de $-20dB$ par décade.

Il n'y a jamais de résonance car le module ne dépasse pas 1. La pulsation de coupure qui est définie par un module égal à $Gmax/\sqrt{2}$ est ici ω_0 . La fréquence de coupure correspond à $\omega_0/2\pi$

Pour les deux circuits, l'élément en sortie est en retard (on ne peut pas faire plus en retard que u_C et pour le circuit (RL) , R est l'élément le plus en retard parmi R et L donc en retard sur l'ensemble (RL) ; en résumé $\varphi < 0$.

Pour plus de détail, pour le circuit (RC) par exemple : à TBF , la tension aux bornes de C l'emporte largement sur celle aux bornes de R (puisque $Z_C >> Z_R$); la tension de sortie est donc quasiment égale à la

tension d'entrée, d'où un gain égal à 1 et un déphasage nul. A THF, c'est l'inverse, la tension aux bornes de R l'emporte sur celle aux bornes de C et $e \simeq u_R$; alors le gain s'annule et on observe un déphasage de $-\pi/2$ entre u_s et e.

On remarque que $H(\omega_0) = 1/(1+j)$ ce qui fait un gain de $1/\sqrt{2}$ et un déphasage de $-\pi/4$ (en effet $1/(1+j) = 1/\sqrt{2}e^{j\pi/4} = e^{-j\pi/4})/\sqrt{2}$.

On peut s'exercer à faire les même types de raisonnements avec le circuit (RL).

Pour le filtre passe-haut, la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{1}{1+\frac{\omega_0}{j\omega}} \qquad avec\ \omega_0 = \frac{R}{L}\ \ ou\ \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Même remarques sauf que les résultats sur le déphasage sont inversés. L'élément en sortie est toujours en avance par rapport au signal d'entrée. Le déphasage varie de $+\pi/2$ à 0 en passant par $+\pi/4$ en ω_0 .

2.2 Dérivateur - intégrateur

La sortie "dérive" l'entrée si u_s est proportionnelle à ω.

La sortie "intègre" l'entrée si u_s est inversement proportionnelle à ω

En effet la dérivée d'un $\cos \omega t$ entraîne le facteur ω et l'intégration un facteur $1/\omega$.

On voit que la fonction de transfert du passe-bas $\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ devient inversement proportionnelle à ω à THF; on obtient un intégrateur.

De même $\underline{H} = \frac{1}{1+\frac{\omega_0}{j\omega}}$ du passe-haut devient proportionnelle à ω à TBF : on obtient un dérivateur.

En résumé :

Dérivateur : signal de sortie proportionnel à ω (**pente +20 dB par décade**)
Intégrateur : signal inversement proportionnel à ω (**pente -20 dB / décade**)

3 Rappels sur les filtres d'ordre 2

3.1 Formes canoniques

Ils sont en général obtenus avec les 3 éléments R, L et C, mais on peut trouver ce genre de filtre avec une association en parallèle de 2 types d'éléments comme R et C par exemple.

Leur fonction de transfert contient un polinôme du second degré en ω^2.

Savoir reconnaître la fonction de transfert d'un filtre **passe-bande** du second ordre :

$$\underline{H} = \frac{A_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

ω_0 s'appelle la pulsation propre du circuit. Q a la dimension d'un nombre.

Comme pour les filtres du premier ordre, un passe-bas s'obtient aux bornes de C , un passe-bande aux bornes de R et un passe-haut aux bornes de L , d'un circuit R, L, C série. C'est l'association des 3 éléments en série qui conduit au second ordre.

3.2 Fréquence de coupure, bande passante

On appelle **fréquence de coupure** d'un filtre, la fréquence pour laquelle le module de la fonction de transfert du filtre atteint sa valeur maximale divisée par $\sqrt{2}$:

$$|H(f_c)| = \frac{|H_{max}|}{\sqrt{2}}$$

Pour un filtre passe-bande, la fréquence où le module est max est la fréquence propre f_0 . il existe deux fréquences de coupure f_{c1} et f_{c2} de part et d'autre de f_0, on parle alors de bande passante à -3dB (car $20\,log(1/\sqrt{2}) = -3$). La largeur de cette bande passante est donnée par (avec $\Delta f = f_{c2} - f_{c1}$) :

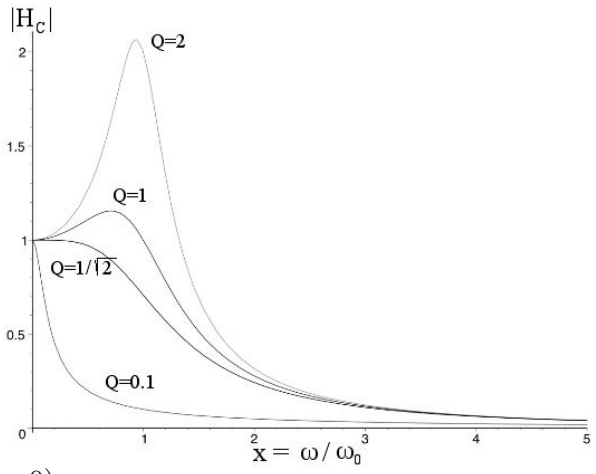
$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

3.3 Filtre obtenu avec un circuit RLC aux bornes de C

La fonction de transfert de ce filtre est :

$$H_C = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{1}{1 + j\,\frac{1}{Q}\,\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$



Le filtre est un **passe-bas** du deuxième ordre:
A TBF la tension aux bornes de C est celle de l'alimentation; la fonction de transfert l'indique mais aussi le fait que Z_C tende alors vers l'infini ce qui correspond à un coupe-circuit aux bornes de C.
A THF la tension aux bornes de C s'annule (Z_C tend vers 0).
On observe une résonance pour $Q > 1/\sqrt{2}$.

La tension aux bornes de C est l'analogue du déplacement d'une masse attachée à un ressort excité par une force : à haute fréquence le déplacement tend vers 0 car la masse n'arrive pas à suivre l'excitation et à la résonance l'amplitude de déplacement est maximal. Si Q est trop élevé , cela peut conduire à des dégâts mécaniques .

Noter sur les courbes que la résonance a lieu légèrement avant la pulsation propre ω_0. Elle a lieu en $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. On vérifie sur cette formule que ω_r n'existe que si $Q > 1/\sqrt{2}$.

La valeur maximale à la résonance est donnée par : $G_{max} = \dfrac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$.

Il n'est pas utile de connaître cette relation par coeur mais on peut toutefois vérifier qu'à la limite de la résonance ($Q = 1/\sqrt{2}$), la valeur maximale est 1.

Par contre, on peut retenir que pour $Q > 2$ $G_{max} \simeq Q$ (à mieux que 3%près).

Puisqu'on prélève aux bornes de C, **la phase du filtre aux bornes de** C **est toujours négative**.

A TBF, $v_e \simeq v_s = v_C$ (car $|Z_C| >> |Z_R| >> |Z_L|$); le déphasage est donc nul. Par analogie , le mouvement d'une masse est alors en phase avec l'excitation.

A THF, $v_e \simeq v_L$; la tension de sortie (bornes de C) est donc déphasée de $-\pi$ avec celle d'entrée (puisque C et L sont déphasées de π). Cela s'interprète bien avec l'analogie mécanique: le ressort est alors en opposition avec l'excitation.

En ω_0 on pourra remarquer que la fonction de transfert est proportionnelle à $-j$ ce qui traduit un déphasage de $-\pi/2$. Ce résultat se retrouve aisément en sachant que ω_0 correspond à l'égalité des modules des tensions aux bornes de L et de C ; on a alors $Z_L + Z_C = 0$. Ainsi $v_e = v_R$ strictement. Comme v_C est déphasée de $-\pi/2$ avec v_R , v_s l'est donc aussi avec v_e.

Rq : En ω_0 les signaux d'entrée et de sortie sont exactement en quadrature (et non pas en phase). En ω_r, pour des valeurs de $Q > 2$, les signaux sont quasiment en quadrature.

3.4 Filtre obtenu avec un circuit RLC aux bornes de R

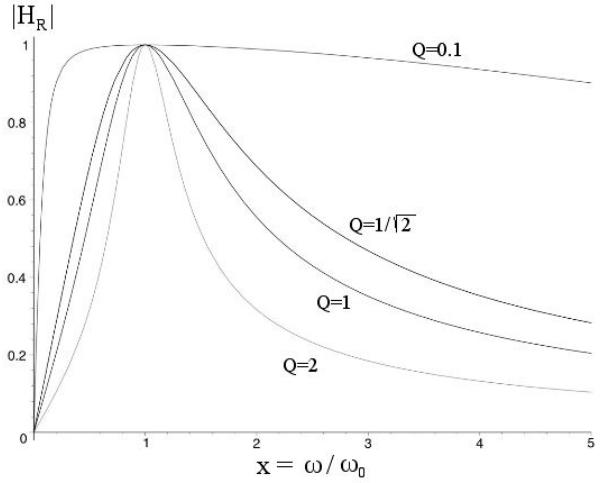
La fonction de transfert de ce filtre est :

$$H_R = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega-LC\omega^2} = \frac{j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Le filtre obtenu est un **passe-bande** du deuxième ordre. La fonction de transfert passe toujours par un maximum.

La tension aux bornes de R est l'analogue de la vitesse d'une masse attachée à un ressort . On remarque un max en ω_0. On parle de résonance en intensité (ou en vitesse) .

$$|H_R|_{max} = 1 \quad en \quad \omega_0$$



.

La largeur de la bande passante est $\Delta\omega$ telle que

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

On prélève aux bornes de R.

A TBF, la tension aux bornes de C domine: $v_e \simeq v_C$; v_R est donc en avance de $+\pi/2$ par rapport à v_e.

A THF, la tension aux bornes de L domine: $v_e \simeq v_L$; v_R est donc en retard de $-\pi/2$ par rapport à v_e.

En ω_0, les signaux d'entrée et de sortie sont **en phase**. Cette valeur peut être repérée précisément à l'oscillo en se plaçant en mode XY puisqu'on observe alors une droite .

De par la définition de la "coupure" , on a $\underline{H} = 1/(1+j)$ ou $\underline{H} = 1/(1-j)$ aux fréquences de coupure; ainsi le dephasage est respectivement $-\pi/4$ et $+\pi/4$.

3.5 Filtre obtenu avec un circuit RLC aux bornes de L

La fonction de transfert de ce filtre est :

$$H_R = \frac{-LC\omega^2}{1+jRC\omega-LC\omega^2} = \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1+j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Le filtre obtenu est un **passe-haut** du deuxième ordre.

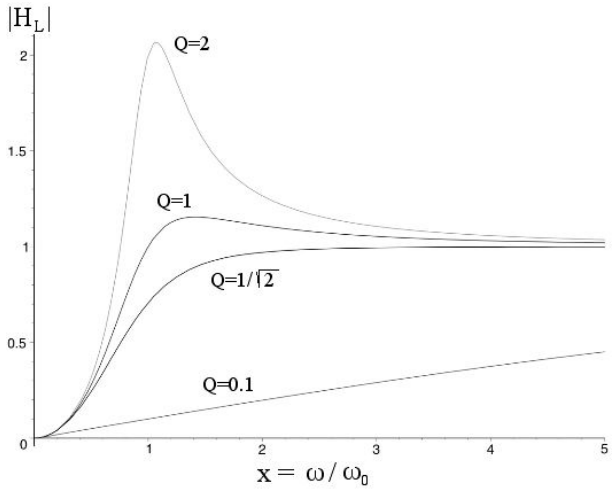
La résonance a lieu pour $Q > 1/\sqrt{2}$

Puisqu'on observe aux bornes de L, le déphasage est toujours positif.

A TBF, $v_e \simeq v_C$,

ce qui conduit à $\varphi \simeq +\pi$

A THF, $v_e \simeq v_L$,

ce qui conduit à $\varphi \simeq 0$

Les signaux d'entrée et de sortie sont en quadrature (et non pas en phase) en ω_0.