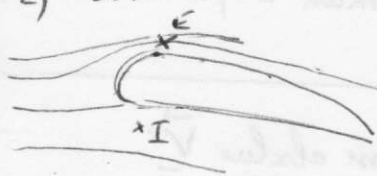


CCP 20 PC

1) Une ligne de courant est tangente aux vecteurs vitesses des particules de fluide. La description est eulérienne (on observe l'ensemble des particules)

2) Loin de l'aile on a v_∞ et p_∞



en E (extrados) on observe un resserrement des lignes de courant

ce qui correspond à une vitesse $v_E > v_\infty$ l'écoulement étant supposé parfait stationnaire incompressible on peut appliquer le théorème de Bernoulli entre 2 points d'une ligne de courant; ici entre ∞ et E :

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 = p_E + \frac{1}{2} \rho v_E^2$$

Comme $v_E > v_\infty$, on a donc $p_E < p_\infty$ (rq le terme $\rho g z$ est négligé par hyp. écoulement)

En I (intrados) on observe un élargissement des lignes de courant; on fait le même raisonnement; cette fois $v_I < v_\infty$ d'où $p_I > p_\infty$

on a donc une pression plus forte p_I sous l'aile que sur l'aile ($p_I > p_E$) d'où une résultante de force de pression vers l'extrados (vers le haut); ceci génère la force de portance.

4) Bernoulli entre ∞ et un point situé à x (avec $\rho g z$ négligé)

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 = p + \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$\text{d'où } p - p_\infty = \frac{1}{2} \rho (v_\infty^2 - v^2)$$

$$\text{soit } \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2} = 1 - \frac{v^2}{v_\infty^2} \leq 1$$

on a bien $C_p \leq 1$ (CQFD)

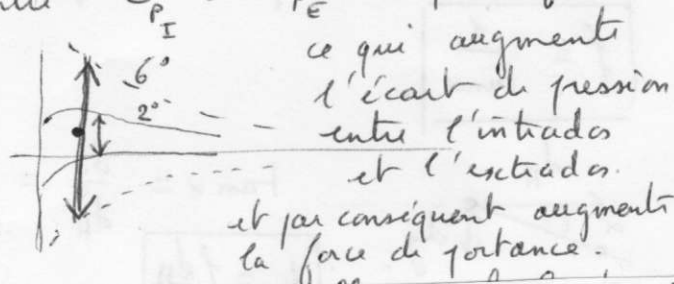
3) Etant donné que $p_I > p_E$ il nous faut $C_{p_I} > C_{p_E}$ donc

C_{p_1}	intrados
C_{p_2}	extrados

$$5) [C] \sim \frac{F}{S v^2} \sim \frac{[N][L]}{[L]^2 [T]^{-2} [M] [L]^2} \sim \frac{[M] [L]^{-1} [T]^{-2}}{[L]^2 [T]^{-2} [M] [L]^2} \sim 1$$

$[C] \sim 1$ C est adimensionnelle (OK)

6) C est plus important par un angle de 6° car la différence entre C_{p_I} et C_{p_E} est plus forte



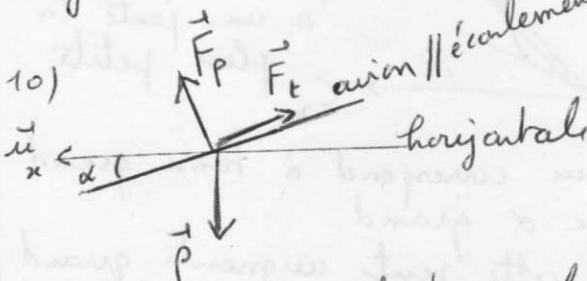
7) Le sujet ne décrit pas vraiment les volets.

La force de portance est proportionnelle à S. Il faut donc augmenter S. Je suppose que les volets ouverts augmentent S.

$$8) \vec{F} + \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = \vec{0}$$

Il faut 4 forces qui s'annulent. $\vec{F} + \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = \vec{0}$ (portance, traînée, poids, poussée). d'où $\vec{F}$ une force due à la propulsion grâce aux moteurs de l'avion. La traînée $\vec{F}_x$ horizontale doit être compensée par $\vec{F}$. Ainsi $\vec{F} + \vec{F}_x = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ et l'avion vole à vitesse horizontale constante. (rq: l'altitude de l'avion étant constante, $\vec{F}_x$ est horizontale)

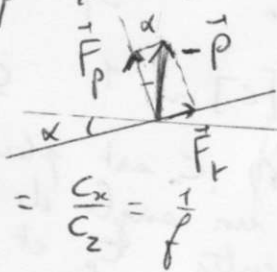
9) A haute altitude le poids est plus faible (g diminue); il faut donc moins de portance mais cet effet est compensé par l'air plus raréfié en altitude. De plus l'air est plus raréfié en altitude il y a alors moins de frottement.



10) Notons $\vec{F}_p$ portance $\perp$ écoulement $\vec{F}_t$ traînée $\parallel$ écoulement

La translation doit être rectiligne et uniforme donc $\vec{F}_p + \vec{F}_t + \vec{P} = \vec{0}$

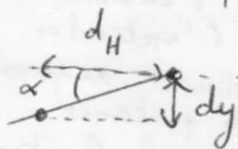
sait $-\vec{P} = \vec{F}_p + \vec{F}_t$



Graphiquement

on voit que $\tan \alpha = \frac{F_t}{F_p} = \frac{C_x}{C_z} = \frac{1}{f}$

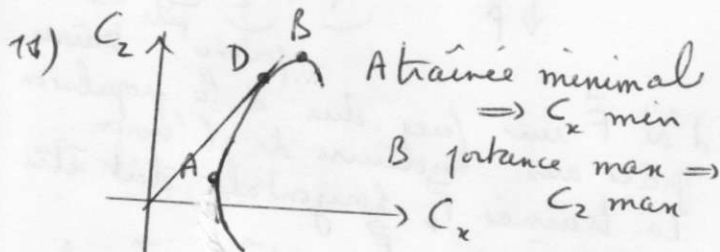
$$f = \frac{1}{\tan \alpha}$$



$$\tan \alpha = \frac{dy}{d_H} = \frac{1}{f}$$

$$d_H = f dy$$

Pour une distance d_H parcourue donnée plus la finesse est grande, moins il y a de perte d'altitude. la finesse mesure ainsi la faculté de l'avion à rester à la même altitude.

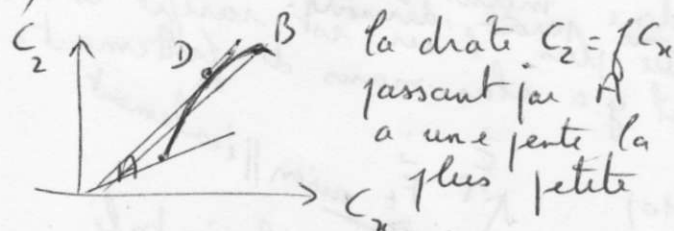


D finesse max $\Rightarrow \frac{C_z}{C_x}$ max

$\frac{C_z}{C_x}$ représente la pente de $C_z = f C_x$

Elle sera max lorsque la droite $C_z = f C_x$ est tangente à la polar.

12) Quand on va de A vers B



ce qui correspond à $\tan \alpha$ grand donc α grand

puis cette pente augmente quand on arrive en D, donc f augmente donc α diminue

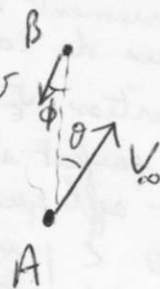
puis de D à B cette pente diminue donc f diminue donc α augmente

Résumé :

de A à D : (traînée min à finesse max)
 $\alpha \downarrow$

de D à B : (finesse max à portance max)
 $\alpha \uparrow$

13)



Vitesse absolue $\vec{V}'$

vitesse relative $\vec{V}_\infty$

vitesse d'entraînement $\vec{v}$

$$\vec{V}' = \vec{V}_\infty + \vec{v}$$

on veut $\vec{V}' \parallel \vec{AB}$

Projection selon la $\perp$ à AB $\Rightarrow$

$$0 = +V_\infty \sin \theta - v \sin \phi$$

sait $V_\infty \sin \theta = v \sin \phi$

14) $\sin \theta = \frac{v \sin \phi}{V_\infty} = \frac{56 \sin 20}{445}$

$$\theta = 2^\circ$$

15) Durée aller $\vec{V}' = \vec{V}_\infty + \vec{v}$

Projⁿ selon AB : $V' = V_\infty \cos \theta - v \cos \phi$

$$T_{\text{aller}} = \frac{d}{V_{\text{aller}}} = \frac{500}{445 \cos 2 - 56 \cos 20}$$

$$T_{\text{aller}} = 1,27 \text{ h} = 1 \text{ h } 16' 30''$$

Durée retour : $\vec{V}' = \vec{V}_\infty + \vec{v}$

Projⁿ selon BA : $V'_{\text{retour}} = V_\infty \cos \theta + v \cos \phi$

$$T_{\text{retour}} = \frac{d}{V'_{\text{retour}}} = \frac{500}{445 \cos 2 + 56 \cos 20} = 1,005 \text{ h}$$

$$T_{\text{retour}} = 1 \text{ h}$$

$$T = T_{\text{aller}} + T_{\text{retour}} = 2 \text{ h } 16'$$

Sans vent : $T' = \frac{2d}{V'}$ avec $V' = V_\infty$ et $\theta = 0$

$$T' = \frac{2 \times 500}{445} = 2 \text{ h } 14'$$

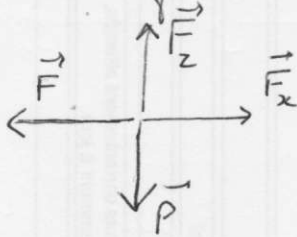
Le retard à l'aller est quasiment compensé

16) (Question ouverte)

(2hs)

Dans cette question, les moteurs sont allumés. On n'a donc plus la relation $f = \frac{1}{\tan \alpha}$ de 10)

On donne $f = 10$ donc $\frac{C_z}{C_x} = 10$



Je suppose que sur la piste, l'avion reste horizontal

$$\text{PFD: } \begin{cases} \vec{F} + \vec{F}_x = m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \vec{P} + \vec{F}_z = \vec{0} \end{cases}$$

projeté horizontalement
projeté verticalement

$$\rightarrow \|\vec{F}_z\| = \|\vec{P}\| = mg$$

Comme $\|\vec{F}_z\| = \frac{C_z}{C_x} \|\vec{F}_x\|$ puisque $C_z = \frac{F_z}{\frac{1}{2} \rho v^2 S}$ et $C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho v^2 S}$

$$\|\vec{F}_x\| = \frac{1}{10} mg$$

Proj algébrique selon x : $F - \frac{mg}{10} = m \frac{dv}{dt}$

Enoncé: la vitesse atteinte en bout de piste est 260 km/h.
Je suppose que F est constante alors par intégration

$$v - v_{\text{initial}} = \left(\frac{F}{m} - \frac{g}{10} \right) t$$

(nulle)

Pour évaluer le temps mis à parcourir la piste, ce n'est pas très facile. Je préfère estimer la longueur de la piste parcourue $L = 1 \text{ km}$

$$F - \frac{mg}{10} = m \frac{dv}{dt} \xrightarrow{\times v} \left(F - \frac{mg}{10} \right) v = m v \frac{dv}{dt}$$

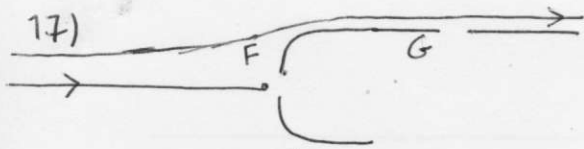
$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow \left(F - \frac{mg}{10} \right) dx = m v dv$$

$$\left(F - \frac{mg}{10} \right) L = \frac{1}{2} m v^2 - 0$$

$$\boxed{F = \frac{1}{2} \frac{m v^2}{L} + \frac{mg}{10}} = \frac{1}{2} \frac{500 \times 10^3 \times \frac{260^2 \times 10^6}{3600^2 \times 10^3}}{10} + \frac{500 \times 10^3 \times 10}{10}$$

$$F = 500 \times 10^3 [2,6 + 1] = 1800 \times 10^3 \text{ N} = \underline{1800 \text{ kN}}$$

Je trouve presque 5 fois plus. Dans mon raisonnement, j'ai trouvé facilement au minimum $\frac{mg}{10}$ soit 500 kN; il y a donc un problème!



17) Fluide parfait incompressible stationnaire $\Rightarrow$ Bernoulli sur 1 L.C.

L.C. aboutissant en F où $v_F = 0$ (point d'arrêt)

$$P_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 = P_F + 0$$

$$\rightarrow P_F = P_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2$$

L.C. le long de G :

$$P_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 = P_G + \frac{1}{2} \rho v_G^2$$

(Je ne vois pas de relation supplémentaire qui permette de relier les expressions de P_G en f. de P_∞ et v_∞)

sauf peut-être $v_G = v_\infty$ ce qui impliquerait $P_G = P_\infty$

19) Manomètre

$$P_H - P_I = \rho_L g h$$

(la de l'hydrostatique)

20) F on peut considérer la pression uniforme dans la partie air du manomètre car $\rho_{air} \ll \rho_L$ (rapport 10^3)

$$P_F = P_H$$

De même $P_G = P_I$

Par différence $P_F - P_G = P_H - P_I = \rho_L g h$

A partir de 18) $P_F - P_G = \frac{1}{2} \rho v_G^2$

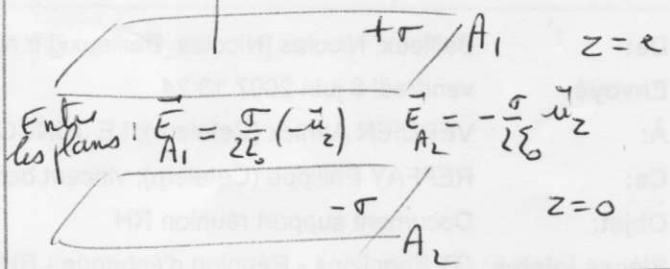
$$\text{Ainsi } v_G^2 = \frac{2 \rho_L g h}{\rho} \quad (\text{peut-être } v_G \approx v_\infty)$$

A mon avis c'est v_G qui nous intéresse puisque c'est la vitesse de l'air (ou de l'écoulement / air)

$h \uparrow \Rightarrow v_G \uparrow$

21) Plan ∞ uniformément chargé

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} \leftarrow \text{normale à partir du plan}$$



Entre les plans: $\vec{E}_{A_1} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_z)$ $\vec{E}_{A_2} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$

Superposition: $\vec{E} = \vec{E}_{A_1} + \vec{E}_{A_2} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$ (OK)

22) $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -\left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) \vec{u}_z \cdot (dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z)$

$$dV = \frac{\sigma}{\epsilon_0} dz$$

Intégrer entre A_2 et A_1 $\left[V\right]_{A_2}^{A_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} [z]_0^e$

$$V_{A_1} - V_{A_2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e$$

Définition de la capacité: $V_{A_1} - V_{A_2} = \frac{Q_{A_1}}{C}$

or Q (charge portée par A_1) = σS

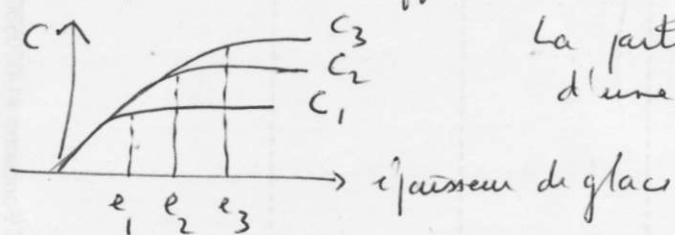
$$\text{d'où } \frac{\sigma e}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{C}$$

$$\text{Ainsi } C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Si milieu diélectrique, on admet $C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{e}$

23) Ici les électrodes (ou plans ∞) sont l'une à côté de l'autre. Les lignes de champ $\vec{E}$ partent de l'une (chargée +) pour rejoindre l'autre (chargée -), d'où la forme en demi-cercle. La capacité diminue si $e \uparrow$ par un condensateur plan où e est la "longueur" des lignes de champ. Pour les condensateurs 1, 2 et 3 on remarque que les lignes de champ

qui augmente en longueur, ce qui devrait avoir pour effet de diminuer c , mais on a aussi des surfaces plus grandes. Manifestement l'effet de S l'emporte, ainsi $c_1 < c_2 < c_3$. (4)



La partie constante de c apparaît à partir d'une certaine épaisseur de glace

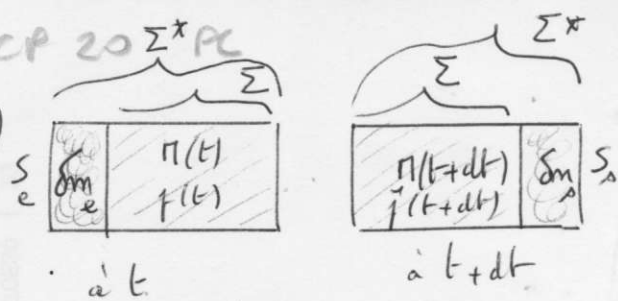
c_1 est sensible à une épaisseur faible
 c_2 moyenne
 c_3 élevée

Les tailles différentes permettent des sensibilités différentes selon l'épaisseur de glace existante.

24) Le son se propage dans la glace à une vitesse différente que dans l'air; probablement plus vite $c_{\text{glace}} > c_{\text{air}}$

Le son mettra donc des durées différentes à aller de l'émetteur au détecteur en traversant des couches de glace + air - grandes. Ces durées permettent de remonter à l'épaisseur de glace traversée.

25)



Le système Σ^* fermé a une masse totale constante.

$$\text{A } t \quad \vec{p}^*(t) = \vec{r}(t) + \Sigma m_e \vec{v}_e$$

$$26) \text{ A } t+dt \quad \vec{r}^*(t+dt) = \vec{r}(t+dt) + \Sigma m_s \vec{v}_s$$

27) En régime stationnaire le système Σ ne voit pas sa quantité de mouvement varier : $\vec{r}(t) = \vec{r}(t+dt)$

$$\text{Alors } d\vec{p}^* = \vec{p}^*(t+dt) - \vec{p}^*(t)$$

$$d\vec{p}^* = \Sigma m_s \vec{v}_s - \Sigma m_e \vec{v}_e$$

De plus la masse de Σ^* est invariante (syst. fermé) donc

$$\Sigma m_e + \Pi(t) = \Pi(t+dt) + \Sigma m_s$$

Et en régime stationnaire $\Pi(t) = \Pi(t+dt)$ donc $\Sigma m_e = \Sigma m_s$

$$\text{Le débit massique } D_m = \frac{\Sigma m_e}{dt} = \frac{\Sigma m_s}{dt}$$

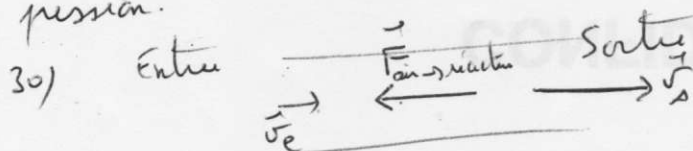
$$\text{Ainsi } \frac{d\vec{p}^*}{dt} = D_m (\vec{v}_s - \vec{v}_e)$$

28) Le système subit comme forces principales (poids négligeable) :
 - la force du réacteur
 - les forces de pression à l'entrée et à la sortie

$$29) \text{ PFD à } \Sigma^* \quad \frac{d\vec{p}^*}{dt} = \text{Forces subies par } \Sigma^*$$

$$D_m (\vec{v}_s - \vec{v}_e) = \vec{F}_{\text{réacteur} \rightarrow \text{air}} + \vec{F}_e + \vec{F}_s$$

Si on approxime $D_m (\vec{v}_s - \vec{v}_e) = \vec{F}_{\text{réacteur} \rightarrow \text{air}}$ c'est qu'on a négligé les forces de pression.



30)

D'après la description du turbo ③ réacteur $v_s \gg v_e$ donc $\vec{F}$ est dans le sens de l'écoulement (gauche vers droite) ou l'entrée vers sortie

donc, comme $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{réacteur}} = -\vec{F}_{\text{réacteur} \rightarrow \text{air}}$ (principe de l'action-réaction), on déduit que $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{réacteur}}$ va de la sortie vers l'entrée (cf schéma)

C'est bien le principe de la propulsion : l'air propulsé vers l'arrière (sortie) l'avion se déplace vers l'avant (entrée).

32) L'énoncé indique que la transformation 1 $\rightarrow$ 2 est adiabatique réversible.

Le gaz est supposé parfait.

$$\text{Loi de Laplace : } T_1^{1-\gamma} = T_2^{1-\gamma}$$

$$\text{soit } T_2 = T_1 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

31) Appliquons le 1^{er} principe par le fluide qui s'écoule entre 1 et 2 :

$$h_2 - h_1 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = w_{12} + q_{12}$$

L'énoncé dit que 1-2 est un diffuseur alors $w_{12} = 0$ (pas de pièces mécaniques à faire tourner)

Ce diffuseur est adiabatique : $q_{12} = 0$

Le gaz est parfait : $h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$

L'énergie cinétique en sortie est négligeable donc $v_2 \approx 0$

L'air vole à la vitesse V_a donc l'air entre à cette vitesse : $v_1 = V_a$

Les variations d'énergie potentielle sont négligeables donc $z_2 - z_1 \approx 0$

$$\text{Ainsi : } c_p (T_2 - T_1) - \frac{V_a^2}{2} = 0$$

$$\text{d'où } T_2 = T_1 + \frac{V_a^2}{2c_p}$$

$$\text{AN } T_2 = -40 + \frac{260^2}{2 \times 1,1 \times 10^3} = -9,3^\circ \text{C}$$

$$\text{d'où } T_2 = 39,5 \times 10^3 \left(\frac{-40 + 273}{-9,3 + 273} \right)^{\frac{1,35}{0,35}} = 263,7 \text{ K}$$

$$T_2 = 55,6 \times 10^3 \text{ Pa}$$

33) Le compresseur est l'étape 2-3

1^{er} principe sur 2-3 : $h_3 - h_2 + \frac{v_3^2 - v_2^2}{2} = w_{23} + q_{23}$

"compression adiabatique" $\rightarrow q_{23} = 0$

ici $w_{23} = w_{\text{comp}}$ demandé

GP : $h_3 - h_2 = c_p (T_3 - T_2)$

compression adiab. rev : $p_3 T_3^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = p_2 T_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

d'où $T_3 = T_2 \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = T_2 \cdot 10^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

L'énoncé dit que "l'énergie cinétique est supposée négligeable entre l'entrée du compresseur et la sortie de la turbine" donc $v_3^2 - v_2^2$ peut être négligé.

Ainsi $c_p T_2 \left[10^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right] = w_{\text{comp}}$

C'est bizarre que l'énoncé donne T_3
Vérifions par notre relation ci-dessus

$T_3 = (-9,3 + 273) \cdot 10^{\frac{1,35-1}{1,35}} = 479 \text{ K}$

C'est proche du 480 K indiqué dans l'énoncé. Tant mieux!

Avec $T_3 = 480 \text{ K}$

$w_{\text{comp}} = c_p (T_3 - T_2)$

$w_{\text{comp}} = 1,1 \times 10^3 (480 - 263,7)$

$w_{\text{comp}} = 238 \text{ kJ.kg}^{-1}$

Le compresseur fournit bien de l'énergie à l'air donc $w_{\text{comp}} > 0$

Pendant dt $\delta W_{\text{comp}} = \delta m_2 w_{\text{comp}}$

$\delta W_{\text{comp}} = \dot{m} dt w_{\text{comp}}$

$P_{\text{comp}} = \frac{\delta W_{\text{comp}}}{dt} = \dot{m} w_{\text{comp}}$

$P_{\text{comp}} = 45 \times 238 = 10,7 \text{ MW}$

34) Compresseur : $c_p (T_3 - T_2) = w_{\text{comp}}$

Turbine 45 : $c_p (T_5 - T_4) = w_{\text{turbine}}$
(m principe que le compresseur)

L'énoncé indique que $|w_{\text{comp}}| = |w_{\text{turbine}}|$
Attention aux signes : $w_{\text{comp}} > 0$ $w_{\text{turbine}} < 0$
donc $T_3 - T_2 = -(T_5 - T_4)$

Ainsi $T_5 = T_4 - T_3 + T_2$

AN $T_5 = 1400 - 480 + 263,7 = 1184 \text{ K}$

La turbine est adiabatique réversible
le gaz est parfait : $p_4 T_4^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = p_5 T_5^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

alors $p_5 = p_4 \left(\frac{T_4}{T_5} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$

"échauffement 34 isobare" : $T_4 = T_3$

AN $p_5 = 10 \times 55,6 \times 10^3 \left(\frac{1400}{1184} \right)^{\frac{1,35}{-0,35}}$

$p_5 = 291 \cdot 10^3 \text{ Pa}$

35)

La tuyère est le dernier élément entre 5 et 6

$c_p (T_6 - T_5) + \frac{1}{2} v_6^2 - 0 = 0 + 0$
↑ adiab.
↑ pas de pertes mécaniques dans la tuyère
énergie cinétique négligée en sortie de turbine 4 donc en entrée de tuyère 4

d'où $v_6^2 = -2 c_p (T_6 - T_5)$

AN $v_6 = \sqrt{-2 \times 1,1 \times 10^3 (680 - 1184)}$

$v_6 = 1053 \text{ ms}^{-1}$

Rq : c'est supersonique $v_6 > v_{\text{son}}$

36) $\dot{P} = \left| F_{\text{réaction}} \right| \cdot v_a \leftarrow \text{la vitesse de l'air}$
 propulsion

$$\dot{P}_{\text{pg}} = D_m (v - v_e) v_a$$

AN $\dot{P}_{\text{pg}} = 45 (1053 - 260) 260$
 $= 9,28 \text{ MW}$

37) $\eta = \frac{\dot{P}_{\text{pg}}}{\dot{P}_{\text{théor}}} = \frac{9,28 \cdot 10^6}{45,5 \cdot 10^6} = 20,4\%$

ou bien $\dot{P}_{\text{propuls}} = \dot{P}_{\text{théor}} = \dot{P}_{\text{compens}}$
 $\dot{P}_{\text{propuls}} = 10,7 \text{ MW (calculé en 34)}$

Cela donnerait $\eta = \frac{10,7}{45,5} = 0,23 = 23\%$ et

ce qui est, certes, assez faible, mais dans le même ordre de grandeur.

Comparé à d'autres machines thermiques, ce rendement est plus faible.

38) $\left[\sqrt{c_p T_e} \right] \sim \sqrt{h} \text{ (enthalpie massique)}$
 $\sim \sqrt{\frac{\text{énergie}}{\text{mass}}}$

ou $[E_{\text{cinétique}}] \sim [m] [\text{vitesse}]^2$

donc $\sqrt{\frac{\text{énergie}}{\text{mass}}} \sim \text{vitesse}$

on a bien $\sqrt{c_p T_e} \sim \text{vitesse (OK)}$

g) Le débit massique $\dot{D}_m = \rho S v$
 ρ , S et v à l'abscisse x

$v(x)$ est donnée par $\sqrt{v_e^2 + 2c_p T_e \left[1 - \left(\frac{P(x)}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$

alors $\dot{D}_m = \rho S \sqrt{v_e^2 + 2c_p T_e \left[1 - \left(\frac{P(x)}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$

on cherche à écrire $\dot{D}_m = \rho_e v_m S_G$ (7)

Ainsi $\rho \sqrt{v_e^2 + 2c_p T_e \left[1 - \left(\frac{P(x)}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} = \rho_e v_m$

Comment éliminer ρ ($= \rho(x)$) ?

Dans la tuyère, la transformation est adiabatique réversible pour le gaz parfait, ainsi $\rho v^\gamma = \text{cte}$ ou encore $\frac{\rho}{\rho_e} = \left(\frac{v_e}{v} \right)^\gamma$

soit $\frac{\rho_e}{\rho^\gamma} = \frac{1}{v^\gamma}$ d'où $\rho = \rho_e \left(\frac{v_e}{v} \right)^\gamma$

alors $\rho_e \left(\frac{v_e}{v} \right)^\gamma \sqrt{v_e^2 + 2c_p T_e \left[1 - \left(\frac{P(x)}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} = \rho_e v_m$

$$G(x) = \left(\frac{v_e}{v} \right)^\gamma \sqrt{v_e^2 + 2c_p T_e \left[1 - \left(\frac{P(x)}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

(Rappel $v_m = \sqrt{2c_p T_e}$)

40) Entrée tuyère : $x=0$, $P(x=0) = P_e$
 donc $\alpha = 1$

On souhaite $v \uparrow$

Or $\dot{D}_m$ reste constant, c'est-à-dire $\rho_e v_m S_G(x)$

ou mieux $S(x) G(x) = \text{cte}$

Le graphique $G(x)$ montre qu'à partir de $\alpha = 1$, G ne peut que croître puisque $G(\alpha=1) = 0$ et $G \geq 0$

donc $G \uparrow$ donc $S \downarrow$ pour satisfaire $S(x) G(x) = \text{cte}$

Ainsi la tuyère doit être convergente

41) Si la tuyère est totalement convergente, alors $S \downarrow$ et donc G ne peut que croître, et ce jusqu'à sa valeur maximale correspondant donc à $\alpha_c = \left(\frac{2}{1+\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

On a alors atteint une pression max

$P_{\text{max}} = \alpha_c P_e$

Or (encore) $v(x) = \sqrt{v_e^2 + 2c_p T_e \left[1 - \left(\frac{P(x)}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$

$$\text{soit } v(x) = \sqrt{v_e^2 + v_m^2 (1 - \alpha_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}})}$$

$$\text{max} \quad \text{négligeable}$$

$$v_{\text{max}} \approx v_m \sqrt{1 - \frac{2}{1+\gamma}}$$

$$v_{\text{lim}} = v_m \sqrt{\frac{\gamma-1}{1+\gamma}}$$

42) on avait vu que $S(x)G(x) = \text{cte}$
 Au col la vitesse est max v_m
 et α vaut α_c

$$\text{donc } S_e G(\alpha_c) = S_{\text{col}} G(\alpha_c)$$

A l'entrée $P(x) = P_e$ et $G(x=0) = \frac{v_e}{v_m}$
 (cf expression du 39 pour $G(x)$)

$$\text{donc } S_e \frac{v_e}{v_m} = S_{\text{col}} G(\alpha_c)$$

$$\text{et } \boxed{\frac{S_{\text{col}}}{S_e} = \frac{v_e}{v_m} G(\alpha_c)}$$

Sur la fig. 13 $G(\alpha_c) \approx 5,2$

$$\text{donc } \frac{S_{\text{col}}}{S_e} = \frac{100}{1000 \times 5,2} \approx 0,02$$

$$43) v_{\text{lim}} = v_m \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \quad \text{d'après 41)}$$

$$\text{or } v_m = \sqrt{2c_p T_e} \quad \text{et } c_p = \frac{R}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

$$\text{donc } \boxed{v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2RT_e \gamma}{(\gamma+1)\pi}}} \quad (\text{OK})$$

Montrons que c'est la vitesse
 du son donnée dans l'énoncé

$$\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

$$\text{Pour un gaz parfait } P = \frac{\rho RT}{\pi} \quad (8)$$

$$\text{donc } \frac{RT_e}{\pi} = \frac{P_e}{\rho_e}$$

De plus la transformation est
 adiabatique réversible, donc
 la loi de Laplace donne $PV^\gamma = \text{cte}$
 or $\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cte}$ soit $\frac{P_e}{\rho_e^\gamma} = \frac{P}{\rho^\gamma}$

$$\Downarrow$$

$$P_e = P \left(\frac{\rho_e}{\rho} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\Rightarrow v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2\gamma P_e}{(\gamma+1)\rho_e}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{1}{\rho_e} \frac{1}{\rho_e^{\frac{1}{\gamma}+1}}}$$

mais v_{lim} correspond à $\rho = \rho_{\text{max}} = \alpha \rho_e$

$$\text{d'où } v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{1}{\rho_e} \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}+1}}}$$

$$\text{on reprend } \alpha = \left(\frac{2}{1+\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{valeur max})$$

$$\rightarrow v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{1}{\rho_e} \frac{2}{1+\gamma}}$$

$$\text{on retrouve bien } v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{\gamma P_e}{\rho_e}} \quad (\text{OK})$$

$$44) \text{ Rappel } \rho_{\text{max}} = \alpha_c \rho_e$$

$$\text{on veut } \rho_{\text{max}} = \rho_{\text{atm}}$$

$$\text{d'où } \boxed{\rho_e = \frac{\rho_{\text{atm}}}{\alpha_c} = \rho_{\text{atm}} \left(\frac{1+\gamma}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

$$\text{AN } \rho_e = 34,5 \cdot 10^3 \left(\frac{1+1,35}{2} \right)^{\frac{1,35}{0,35}}$$

$$\rho_e = 64,3 \text{ kg/m}^3$$

45) Pour atteindre une vitesse plus élevée
 il faut diminuer la pression (d'après
 Bernoulli) donc α ($\alpha = \frac{\rho}{\rho_e}$)
 cf graphique: $G(\alpha) \searrow$ quand $\alpha \searrow$ à partir
 de α_c .

Avec $D_m = \rho_e v_m S G = \text{cte}$, on voit que
 S doit $\nearrow$. De convergente la tuyère
 passe à divergente.