

## Physique : Traitement thermique de cartes électroniques

Les différentes parties du problème sont largement indépendantes entre elles.

### I. Préliminaires : la conduction thermique

#### I.1. Conduction thermique unidimensionnelle

On considère un matériau solide homogène de conductivité thermique  $\lambda$ , de masse volumique  $\rho$  et de chaleur massique à pression constante  $c_p$

( $\lambda$ ,  $c_p$ ,  $\rho$  sont supposés constants).

Il règne dans ce milieu un gradient de température, dirigé selon l'axe  $Ox$ , de sorte que la température en un point d'abscisse  $x$ , à l'instant  $t$  est  $T(x, t)$ .

On suppose que le milieu évolue à pression constante.

I.1.a) A partir de la loi de Fourier, exprimer la puissance thermique  $P_{th}$  qui traverse vers les  $x > 0$  une surface plane d'aire  $A$ , perpendiculaire à  $Ox$ , en fonction de  $\lambda$ ,  $A$ , et  $\frac{\partial T}{\partial x}$ .

I.1.b) On s'intéresse à une « tranche » du milieu comprise entre les plans  $x$  et  $x + dx$ , d'aire  $A$ . Exprimer la variation d'enthalpie  $dH$  de cette tranche pendant un intervalle de temps  $dt$  en fonction de  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $A$ ,  $dx$ ,  $dt$  et  $\frac{\partial T}{\partial t}$ .

I.1.c) En déduire que la fonction  $T(x, t)$  vérifie l'équation différentielle :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \Gamma_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

où l'on a introduit la quantité  $\Gamma_p = \rho c_p$ .

Quelle est la signification physique de  $\Gamma_p$  ? Quelle est son unité dans le système SI ?

I.1.d) L'équation différentielle (1) est elle invariante lorsque l'on effectue le changement de variable  $t \rightarrow -t$  ? Interpréter physiquement votre réponse.

I.1.e) Connaissez vous d'autre(s) domaine(s) de la physique où l'on rencontre une équation analogue à (1) ?

### I.2. Conduction thermique unidimensionnelle en régime permanent

Une plaque plane de conductivité thermique  $\lambda$ , d'épaisseur  $e$  et normale à l'axe  $Ox$ , sépare deux milieux dont la température est uniforme et constante. Le milieu 1, occupant la région  $x < 0$  est à la température  $T_1$ , alors que le milieu 2, remplissant la région  $x > e$  est à la température  $T_2$ .

Dans cette question, on se place en régime permanent. Dans la plaque, la température est donc seulement une fonction de  $x$ .

I.2.a) Déterminer la température  $T(x)$  qui règne dans la plaque.

I.2.b) Calculer la puissance thermique  $P_{1 \rightarrow 2}$  transférée depuis le milieu 1 vers le milieu 2, à travers une surface  $S$  de la plaque.

I.2.c) En vous appuyant sur une analogie électrocinétique, définir la résistance thermique  $R_{th}$  d'une surface  $S$  de la plaque, entre les deux milieux. Exprimer  $R_{th}$  en fonction de  $\lambda$ ,  $e$  et  $S$ .

I.2.d) Quelles lois d'association de deux résistances thermiques peut-on prévoir sans calcul dans le cas de deux résistances en série ? Même question dans le cas de deux résistances en parallèle.

### Traitement thermique de cartes électroniques.

Une des étapes de la fabrication des cartes supportant les circuits électroniques intégrés consiste à les enduire d'une résine époxy qui durcit à température élevée et sous forte pression. Pour cela, on rassemble les cartes enduites de résine en piles, chacune étant séparée des autres par une plaque métallique.

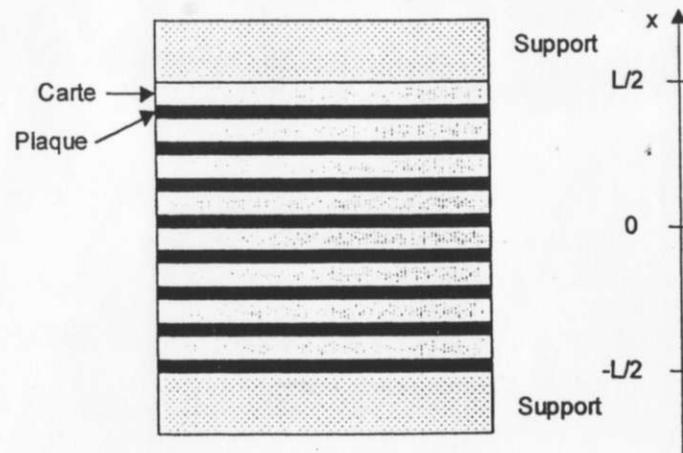


Figure 1

Toutes les cartes sont planes, ont la même épaisseur  $e_1$  et une conductivité thermique  $\lambda_1$ . Les plaques métalliques de séparation, planes elles aussi, ont une épaisseur  $e_2$  et une conductivité thermique  $\lambda_2$ . Les cartes et les plaques ont une aire  $A$ .

L'ensemble ainsi obtenu, constitué d'un grand nombre de couches, d'épaisseur totale  $L$ , est placé entre deux supports qui permettent à la fois de chauffer l'empilement et de soumettre la pile de cartes à la pression élevée nécessaire au durcissement de la résine (voir figure 1).

Les questions qui suivent ont pour but d'étudier les aspects dynamiques du réchauffage de ces empilements. On admettra que la résine époxy ne joue aucun rôle dans les transferts et bilans thermiques. Sauf indication contraire, on néglige tout transfert thermique se produisant par les faces latérales des plaques et des cartes. De plus, on suppose que tous les contacts thermiques sont parfaits : la température est continue dans l'empilement.

## II. Etude d'un milieu feuilleté – Approximation du milieu continu.

Afin d'étudier de façon simplifiée les transferts thermiques, on cherche à représenter le système feuilleté décrit précédemment comme un milieu homogène. Cette partie II a pour but de déterminer les caractéristiques de ce milieu équivalent.

II.1.a) On considère que les transferts thermiques s'effectuent seulement selon la direction  $Ox$  (figure 1). Déterminer la résistance thermique  $R_1$  d'une épaisseur  $e$  du matériau, de surface  $S$ , constituée de  $N$  empilements plaque-carte. En déduire que l'empilement est équivalent à une épaisseur  $e$  d'un matériau homogène de section  $S$ , dont on exprimera la conductivité thermique  $\lambda$  en fonction de  $\lambda_1, \lambda_2, e_1$  et  $e_2$ .

II.1.b) Vérifier la pertinence du résultat sur les 2 cas particuliers suivants  $\lambda_1 = \lambda_2$  et  $e_1 \ll e_2$ .

II.2.a) Déterminer de même la conductivité thermique  $\lambda_{//}$  du milieu homogène équivalent au milieu feuilleté si l'on considère un transfert thermique *parallèle* au plan des cartes.

II.2.b) Vérifier la pertinence du résultat sur les 2 cas particuliers suivants  $\lambda_1 = \lambda_2$  et  $e_1 \ll e_2$ .

II.3) Pour chaque milieu, on définit les quantités  $\Gamma_{p1} = \rho_1 c_{p1}$  et  $\Gamma_{p2} = \rho_2 c_{p2}$ . Déterminer  $\Gamma_p$  pour le milieu homogène équivalent.

II.4) Application numérique : On donne

- cartes :  $\rho_1 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $c_{p1} = 1500 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\lambda_1 = 0,3 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $e_1 = 2,5 \text{ mm}$

- plaques métalliques :  $\rho_2 = 8000 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $c_{p2} = 480 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\lambda_2 = 12 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $e_2 = 2,5 \text{ mm}$ .

Déterminer  $\lambda$ ,  $\lambda_{//}$  et  $\Gamma_p$ .

Dans toute la suite, on envisage seulement des transferts thermiques parallèles à l'axe  $Ox$ .

## III Dynamique du chauffage des empilements.

Alors que l'ensemble des cartes est à la température ambiante  $T_a = 290 \text{ K}$ , on porte brusquement, à  $t = 0$ , la température des deux supports à  $T_0 = 460 \text{ K}$ . Cette température est maintenue constante et uniforme dans les supports durant toute la durée de l'expérience.

Comme l'a montré la partie II, l'empilement des cartes et des plaques de séparation peut être considéré comme un milieu homogène de conductivité thermique  $\lambda$  et de produit  $\Gamma_p$  uniformes. Ce milieu occupe l'espace compris

entre les plans  $x = -\frac{L}{2}$  et  $x = \frac{L}{2}$ , sur une section  $A$  (figure 1).

Dans les applications numériques, on prendra :  $L = 5 \text{ cm}$ ,  $A = 0,02 \text{ m}^2$ ,  $\lambda = 0,59 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et  $\Gamma_p = 2,67 \cdot 10^6 \text{ S.I.}$

III.1) En la justifiant de façon qualitative, représenter sur un schéma l'allure des profils de température dans l'empilement en fonction de  $x$  à différents instants.

On fera apparaître clairement les profils de température dans les cas particuliers  $t = 0$  et  $t \rightarrow \infty$ .

III.2) En se basant sur des considérations purement dimensionnelles, construire une constante de temps  $\tau$  à partir des paramètres physiques du problème :  $\Gamma_p, \lambda$  et  $L$ .

Evaluer numériquement  $\tau$  et donner une interprétation physique à ce paramètre.

III.3) On pose  $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0$ . Ecrire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $\theta(x, t)$  et les conditions aux limites de  $\theta(x, t)$  en  $x = -\frac{L}{2}$  et

$$x = \frac{L}{2}.$$

III.4) On cherche la solution sous la forme d'un développement en série de la

forme  $\theta(x, t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{\infty} f_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ , où la somme ne concerne que les

entiers  $n$  impairs.

III.4.a) Vérifier que les fonctions de ce type sont compatibles avec les conditions aux limites imposées et déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $f_n(t)$ .

III.4.b) Donner la solution générale de cette équation. Définir le temps  $\tau_n$  caractéristique de l'évolution temporelle de la fonction  $f_n(t)$  (exprimer  $\tau_n$  en fonction de  $L, n, \Gamma_p$  et  $\lambda$ ).

III.5) Les constantes de temps  $\tau_n$  décroissent quand  $n$  augmente. Justifier qualitativement cette propriété à partir de la loi de Fourier.

III.6) On admet que les conditions initiales imposent, pour tout  $n$  impair :

$$f_n(0) = \frac{4(T_0 - T_a)}{n\pi} (-1)^{(n+1)/2}$$

Calculer le temps  $t_1$  pour lequel l'amplitude du premier terme de la série,  $f_1(t_1)$ , est 100 fois plus grande (en valeur absolue) que celle du second terme non nul :  $f_3(t_1)$ .

Déterminer numériquement  $t_1$ .

Dans toute la suite, on prendra pour  $\theta(x, t)$  l'expression approchée suivante, valable pour  $t > t_1$  :

$$\theta(x, t) \cong f_1(t) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

III.7) A partir de quel instant  $t_d$  la température au centre de l'empilement est-elle supérieure ou égale à la température de durcissement  $T_d = 440 \text{ K}$  ? Justifier a posteriori l'utilisation de l'expression simplifiée de  $\theta(x, t)$ .

#### IV. Bilan énergétique et entropique du processus

On effectue dans cette partie des bilans thermodynamiques entre l'instant initial  $t = 0$  et un instant  $t$ , vérifiant  $t > t_1$ . On pourra donc poser, à l'instant  $t$  (mais pas à l'instant 0) :

$$\theta(x, t) \cong f_1(t) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

L'empilement est toujours considéré comme un milieu homogène.

IV.1) Calculer la variation d'enthalpie  $dH$  d'un élément de volume  $Adx$  de l'empilement compris entre les plans  $x$  et  $x + dx$ , entre l'instant 0 et l'instant  $t$ .

IV.2) En déduire que la chaleur totale  $Q(t)$  qu'a reçu l'ensemble de l'empilement entre l'instant 0 et l'instant  $t$  vaut :

$$Q(t) = \Gamma_p AL (T_0 - T_a) \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)\right)$$

Application numérique : calculer  $Q(t_d)$

IV.3) Exprimer la variation d'entropie  $dS$  d'un élément de volume  $Adx$  entre les instants 0 et  $t$  en fonction de  $A, dx, \Gamma_p, T_0, T_a, f_1(t), x$  et  $L$ .

Calculer ensuite la variation d'entropie  $\Delta S(t)$  de l'empilement dans son ensemble entre l'instant 0 et l'instant  $t$ . On introduira la fonction

$$F(a) = \int_{-1/2}^{1/2} \ln(1 + a \cos(\pi u)) du$$

Pour  $a$  petit devant 1, on a  $F(a) \cong \frac{2a}{\pi} - \frac{a^2}{4}$ . Dans cette approximation, en déduire une expression simplifiée de  $\Delta S(t)$ .

IV.4) Rappeler le second principe de la thermodynamique et définir les notions d'entropie échangée et d'entropie créée par un système fermé au cours d'une transformation quelconque. Comment qualifie-t-on une transformation pour laquelle l'entropie créée est nulle ?

IV.5) Montrer que l'entropie créée  $S_{cr}(t)$  entre l'instant 0 et l'instant  $t$  s'écrit :

$$S_{cr}(t) = \Gamma_p AL \left[ \ln\left(\frac{T_0}{T_a}\right) + \frac{T_a}{T_0} - 1 - \frac{4}{\pi^2} \frac{(T_a - T_0)^2}{T_0^2} \exp\left(-\frac{2t}{\tau_1}\right) \right]$$

Calculer  $S_{cr}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} S_{cr}(t)$ . Que peut-on dire sans calcul du signe de  $S_{cr}^\infty$  ?

Montrer que l'entropie créée vérifie :  $\frac{dS_{cr}}{dt} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Interpréter ce résultat.

IV.6) On montre, dans un cours de thermodynamique avancée, que l'entropie créée par diffusion thermique par unité de volume et par unité de temps vaut, pour un milieu de conductivité thermique  $\lambda$  :

$$\dot{s}_{cr} = \frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2$$

IV.6.a) Vérifier l'homogénéité de cette relation, et sa pertinence.

IV.6.b) Sur un graphique, représenter qualitativement  $\dot{s}_{cr}(x, t)$  en fonction de  $x$  à différents instants du processus. En quels points du matériau, et à quelle date,  $\dot{s}_{cr}$  est-elle maximale ? Interpréter qualitativement.

I.1.a) Loi de Fourier : puissance surfacique

$$j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

La puissance qui traverse la surface A est

$$P_{th} = j_{th} \cdot A = -\lambda A \frac{dT}{dx}$$

I.1.b)  $dH = dm_p c_p dT$  où  $dT$  est la variation de  $t^\circ$  de la tranche observée sur une durée  $dt$ :  $dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt$

$$dH = \rho A dx c_p \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

I.1.c) Bilan thermique sur la tranche  $[x, x+dx]$

$$dH = P_{th}(x) dt - P_{th}(x+dx) dt$$

$$\rho A dx c_p \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\frac{\partial P_{th}}{\partial x} dx dt$$

$$\rho A c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{ou} \quad \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$\Gamma = \rho c_p$  représente une capacité thermique volumique, d'unité  $J \cdot K^{-1} \cdot m^{-3}$

I.1.d)  $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$  devient  $-\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$  si on change

$t$  en  $-t$ . L'équation de diffusion n'est donc pas invariante par renversement du temps - Cela traduit l'irréversibilité du transfert de chaleur.

I.1.e) On peut rencontrer le même type d'équation en électromagnétisme sous certaines conditions.

Maxwell-Ampère :  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

Milieu conducteur :  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

Si le courant de déplacement  $\epsilon_0 |\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}| \ll |\vec{j}|$

alors  $\text{rot } \vec{B} \approx \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$

et  $\text{rot rot } \vec{B} = \text{grad div } \vec{B} - \Delta \vec{B}$  donne :

$$\mu_0 \sigma \text{rot } \vec{E} = 0 - \Delta \vec{B} \Rightarrow \Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Avec  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

A 1 dimension  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial B}{\partial t} \end{array} \right\}$

On retrouve donc le même type d'équation dans la propagation d'onde électromagnétique dans un bon conducteur.

I.2.a) En régime permanent l'équation de diffusion devient  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

Intégrons 2 fois :  $T = ax + b$

Avec les conditions aux limites  $T(x=0) = T_1$   
 $T(x=e) = T_2$

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{e} x + T_1$$

I.2.b) La puissance surfacique est  $j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

La puissance à travers S est  $P_{1 \rightarrow 2} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S$

$$P_{1 \rightarrow 2} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{e} S$$

$$I.2.c) I = \frac{V_1 - V_2}{R} \quad P_{1 \rightarrow 2} = \lambda \frac{(T_1 - T_2) S}{e}$$

on peut définir une résistance thermique  $R_{th}$  telle que  $P_{1 \rightarrow 2} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$   $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$

I.2.d) Deux résistances en série (càd parcourues par la même puissance  $P_{th}$ ) sont telles que  $R_{th \text{ série}} = \sum R_{th} = R_1 + R_2$

Deux résistances en parallèle (càd entre lesquelles on a la même différence de  $t^\circ$ ) sont telles que

$$\frac{1}{R_{th \parallel}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

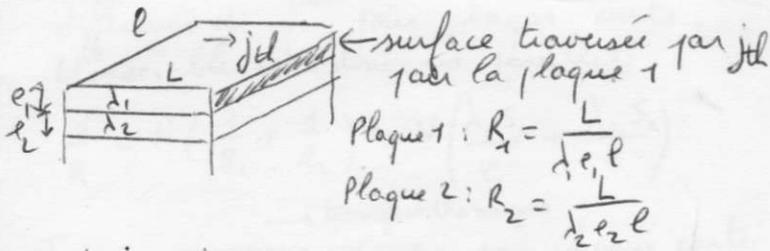
II.1.a) Toutes les résistances sont parcourues par la même puissance ; elles sont donc bien en série :  $R_1 = N \left( \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} \right)$

On veut écrire  $R_1 = \frac{e}{\lambda S}$  or  $e = N(e_1 + e_2)$

On déduit donc :  $\lambda = \frac{e_1 + e_2}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2}}$

II.1.b) si  $\lambda_1 = \lambda_2$  alors  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$   
Il s'agit d'un seul matériau identique.  
si  $e_1 \ll e_2$  alors  $\lambda \approx \frac{e_2}{\lambda_2} = \lambda_2$   
Le matériau 1 n'existe presque pas.

II.2.a) Un transfert thermique parallèle à plan des cartes correspond à une association



\$R\_1\$ et \$R\_2\$ sont en // : \$\frac{1}{R\_{12}} = \frac{1}{R\_1} + \frac{1}{R\_2}\$

On a \$N\$ plaques 12 : \$\frac{1}{R\_{tot}} = \frac{1}{R\_{12}} + \frac{1}{R\_{12}} + \dots = \frac{N}{R\_{12}}\$

soit \$\frac{1}{R\_{tot}} = \frac{N}{L} (\lambda\_1 e\_1 + \lambda\_2 e\_2)\$

On veut \$R\_{tot} = \frac{L}{\lambda\_{//} N (e\_1 + e\_2)}\$

d'où \$\frac{N}{L} (\lambda\_1 e\_1 + \lambda\_2 e\_2) = \frac{N \lambda\_{//} (e\_1 + e\_2)}{L}\$

soit \$\lambda\_{//} = \frac{\lambda\_1 e\_1 + \lambda\_2 e\_2}{e\_1 + e\_2}\$

II 2.b) si \$\lambda\_1 = \lambda\_2\$ alors \$\lambda = \lambda\_1 = \lambda\_2\$ (1 seul matériau)

II 3) La capacité thermique totale est \$\Gamma\_p V = N [\Gamma\_{p1} V\_1 + \Gamma\_{p2} V\_2]\$

où \$V\$ est le volume total du milieu  
\$V\_1\$ le volume d'une plaque d'épaisseur \$e\_1\$  
\$V\_2\$ le volume d'une plaque d'épaisseur \$e\_2\$

ainsi \$\Gamma\_p N (e\_1 + e\_2) = N [\Gamma\_{p1} e\_1 + \Gamma\_{p2} e\_2]\$

d'où \$\Gamma\_p = \frac{\Gamma\_{p1} e\_1 + \Gamma\_{p2} e\_2}{e\_1 + e\_2}\$

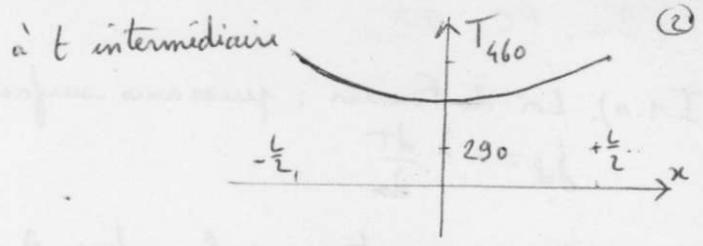
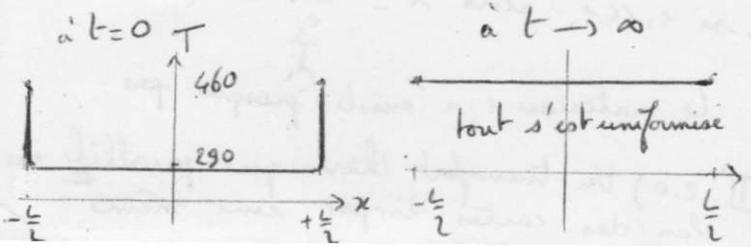
II 4) AN \$\lambda\_{//} = \frac{0,3 \times 2,5 + 12 \times 2,5}{2,5 + 2,5} = 6,15 \text{ W.m}^{-1} \text{ K}^{-1}\$

\$\lambda = \frac{2,5 + 2,5}{\frac{2,5}{0,3} + \frac{2,5}{12}} = 0,58 \text{ W.m}^{-1} \text{ K}^{-1}\$

\$\Gamma\_p = \frac{10^3 \cdot 1500 \times 2,5 + 8000 \times 480 \times 2,5}{2,5 + 2,5}\$

\$\Gamma\_p = 2670 \text{ kJ.K}^{-1} \text{ m}^{-3}\$

III 1) On chauffe subitement les 2 supports  
On remarque une symétrie par rapport à \$x=0\$



III 2) L'équation de diffusion : \$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}\$

indique \$\tau = \frac{L^2 \rho c}{\lambda} = \frac{L^2 \Gamma\_p}{\lambda}\$ en raisonnant par analyse dimensionnelle

AN \$\tau = \frac{5^2 \times 10^{-4} \times 2,67 \cdot 10^6}{0,59} = 11300 \text{ s} = 3 \text{ h } 9 \text{ min}\$

\$\tau\$ mesure la durée d'uniformisation de la température (ordre de grandeur).

III 3) Eq de diffusion : \$\lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \Gamma\_p \frac{\partial \theta}{\partial t}\$

Avec \$\theta = T(x,t) - T\_0\$ : \$\lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \Gamma\_p \frac{\partial \theta}{\partial t}\$

Conditions aux limites : \$T = T\_0\$ en \$x = \pm \frac{L}{2}\$  
d'où \$\theta = 0\$ en \$x = \pm \frac{L}{2} \forall t\$

III 4) a) En \$x = \pm \frac{L}{2}\$ on a bien \$\cos \frac{n\pi x}{L} = 0\$  
La fonction proposée est compatible avec les conditions limites.  
\$\lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \Gamma\_p \frac{\partial \theta}{\partial t}\$ avec \$\theta = \sum\_n f\_n(t) \cos(\frac{n\pi x}{L})\$

devient \$-\lambda \sum\_n f\_n(t) (\frac{n\pi}{L})^2 \cos(\frac{n\pi x}{L}) = \Gamma\_p \sum\_n f'\_n(t) \cos(\frac{n\pi x}{L})\$

vérifiée pour tout \$n\$ d'où :  
\$-(\frac{n\pi}{L})^2 \lambda f\_n(t) = \Gamma\_p f'\_n(t)\$ ou \$f'\_n + \frac{\lambda (\frac{n\pi}{L})^2}{\Gamma\_p} f\_n = 0\$

III 4) b) \$f\_n = A\_n e^{-\frac{t}{\tau\_n}}\$ avec \$\tau\_n = \frac{\Gamma\_p (L/n\pi)^2}{\lambda} = \frac{\tau}{n^2 \pi^2}\$

III 5) \$\theta\$ varie en \$\cos \frac{n\pi x}{L}\$  
donc d'après la loi de Fourier la puissance surfacique \$j\$ varie proportionnellement à \$n\$ (car \$j = -\lambda \text{ grad } \theta\$)

Plus \$n\$ est grand plus \$j\$ est grand, mieux le transfert s'effectue, plus la durée d'homogénéisation des \$t\$ est court.

III 6) On souhaite  $|f_1(t_1)| = 100 |f_3(t_1)|$

avec  $f_n(t) = A_n e^{-\frac{t}{\tau_n}}$  et  $f_n(0)$  donné dans l'énoncé

soit  $A_n = f_n(0) = \frac{4(T_0 - T_a)}{n\pi} (-1)^{(n+1)/2}$

d'où  $\left| \frac{(-1)^{1+1}}{1} \right| e^{-\frac{t_1}{\tau_1}} = 100 \left| \frac{(-1)^{3+1}}{3} \right| e^{-\frac{t_1}{\tau_3}}$

soit  $e^{-t_1(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_3})} = \frac{100}{3}$

$t_1 = \ln \frac{100}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tau_3} - \frac{1}{\tau_1}}$

Or  $\tau_n = \frac{\tau}{n^2 \pi^2}$  donc  $t_1 = \frac{\tau}{\pi^2} \ln \frac{100}{3} \cdot \frac{1}{3^{-1} - 1^{-1}}$

$t_1 = \frac{\tau}{8\pi^2} \ln \frac{100}{3}$

AN:  $t_1 = \frac{11300}{8\pi^2} \ln \frac{100}{3} = 502 \text{ s} = 8 \text{ min } 20 \text{ s}$

III 7) L'énoncé propose:  $\theta(x, t) = f_1(t) \cos \frac{\pi x}{L}$

or  $f_1(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$  et  $A_1 = f_1(0)$

avec  $f_1(0) = \frac{4(T_0 - T_a)}{\pi} (-1)^{1+1}$

soit  $\theta(x, t) = -\frac{4(T_0 - T_a)}{\pi} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \cos \frac{\pi x}{L}$

on souhaite  $\theta(0, t_d) = T_d - T_0$

d'où  $\frac{4(T_0 - T_a)}{\pi} e^{-\frac{t_d}{\tau_1}} = T_d - T_0$

$t_d = -\tau_1 \ln \left( \frac{\pi(T_d - T_0)}{4(T_0 - T_a)} \right)$  avec  $\tau_1 = \frac{\tau}{\pi^2}$

AN  $t_d = -\frac{11300}{\pi^2} \ln \left( \frac{\pi}{4} \frac{440 - 460}{290 - 460} \right) = \frac{2730 \text{ s}}{45 \text{ min } 30 \text{ s}}$

IV 1) Au début la  $T^0$  est  $T_a$   
A t elle est devenue  $T = \theta + T_0$

La capacité thermique volumique est  $\Gamma_p$

$dH = \Gamma_p A dx (T - T_a)$   
 $= \Gamma_p A dx \left( f_1(t) \cos \frac{\pi x}{L} + T_0 - T_a \right)$

avec  $f_1(t) = -\frac{4(T_0 - T_a)}{\pi} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$

$dH = -\Gamma_p A dx \left( \frac{4(T_0 - T_a)}{\pi} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \cos \frac{\pi x}{L} - T_0 + T_a \right)$

$dH = \Gamma_p A dx (T_0 - T_a) \left( 1 - \frac{4}{\pi} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \cos \frac{\pi x}{L} \right)$

IV 2) Il faut intégrer dH entre  $x = -\frac{L}{2}$  et  $\frac{L}{2}$

$Q = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dH = \Gamma_p A (T_0 - T_a) \left[ L - \frac{4}{\pi} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \left[ \frac{\sin \frac{\pi x}{L}}{\frac{\pi}{L}} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \right]$

$Q = \Gamma_p A L (T_0 - T_a) \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right)$

AN:  $Q = 2670 \cdot 10^3 \cdot 0,02 \cdot 5 \cdot 10^{-2} (460 - 290) \cdot \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{4300 \pi^2}{11300}} \right)$

$Q = 420 \text{ kJ}$

IV.3) Comme pour une phase condensée  
 $dS = \Gamma_p A dx \ln \frac{T}{T_a}$  pour la tranche dx

$dS = \Gamma_p A dx \ln \left( \frac{f_1(t) \cos \frac{\pi x}{L} + T_0}{T_a} \right)$

Pour l'ensemble on intègre x entre  $-\frac{L}{2}$  et  $\frac{L}{2}$

$\Delta S = \Gamma_p A \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \left( \ln \left( T_0 + f_1(t) \cos \frac{\pi x}{L} \right) - \ln T_a \right)$

Or  $\ln \left( T_0 + f_1(t) \cos \frac{\pi x}{L} \right) = \ln \left( T_0 \left( 1 + \frac{f_1(t) \cos \frac{\pi x}{L}}{T_0} \right) \right)$   
 $= \ln T_0 + \ln \left( 1 + \frac{f_1(t) \cos \frac{\pi x}{L}}{T_0} \right)$

Avec le formulaire donné:

$\Delta S = \Gamma_p A \left[ L \ln \frac{T_0}{T_a} + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \ln \left( 1 + \frac{f_1(t) \cos \frac{\pi x}{L}}{T_0} \right) dx \right]$

Posons  $u = \frac{x}{L}$  et  $a = \frac{f_1(t)}{T_0}$  on trouve

$\Delta S = \Gamma_p A \left[ L \ln \frac{T_0}{T_a} + LF \left( \frac{f_1(t)}{T_0} \right) \right]$

En prenant l'approximation suggérée:

$\Delta S \approx \Gamma_p A L \left[ \ln \frac{T_0}{T_a} + \frac{2f_1(t)}{\pi T_0} - \frac{f_1^2(t)}{4T_0^2} \right]$

Remplaçons  $f_1(t)$  (cf IV 1)

$\Delta S = \Gamma_p A L \left[ \ln \frac{T_0}{T_a} + \frac{8(T_0 - T_a)}{\pi^2 T_0} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{4(T_0 - T_a)^2}{\pi^2 T_0^2} e^{-\frac{2t}{\tau_1}} \right]$

IV 4) Second principe de la thermo :

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créé}} \quad \leftarrow \text{par irréversibilité} > 0$$

$$S_{\text{éch}} = \int \frac{\delta Q}{T} \quad T \leftarrow t^{\circ} \text{ de la source d'échange}$$

si  $S_{\text{créé}} = 0$  alors la transf. est réversible

IV 5) Ici la source d'échange est à la température  $T_0$  (celle qu'on impose) donc  $S_{\text{éch}} = \frac{Q}{T_0}$

$$\text{d'où } S_{\text{créé}} = \Delta S - \frac{Q}{T_0}$$

Avec les expressions de  $\Delta S$  et de  $Q$  trouvées en IV 3 et IV 2 on trouve :

$S_{\text{créé}}(t) =$  l'expression de l'énoncé !

$$\text{Pour } t \rightarrow \infty \quad S_{\text{créé}}^{\infty} = \rho A L \left[ \ln \frac{T_0}{T_a} + \frac{T_a}{T_0} - 1 \right]$$

Sans calcul  $S_{\text{créé}}^{\infty} > 0$

$\frac{dS_{\text{créé}}}{dt}$  varie en  $e^{-\frac{2t}{\tau}} \rightarrow 0$  à  $t \rightarrow \infty$ .  
A la fin la  $t^{\circ}$  est quasi-uniforme. Les dernières variations de température ne créent donc pas (presque pas) d'entropie.

$$\text{IV 6) a) } \dot{S}_{\text{créé}} \sim \frac{\text{Energie}}{\text{temps} \times \text{température} \times \text{volume}} \sim \frac{\text{puissance}}{[T][L]^3}$$

$$\lambda \sim \frac{P}{[L][T]} \quad \frac{\partial T}{\partial x} \sim \frac{[T]}{[L]}$$

$$\text{donc } \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \sim \frac{P}{[L][T][L]^2} \sim \frac{P}{[T][L]^3}$$

$$\dot{S}_{\text{créé}} = \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \text{ est bien homogène}$$

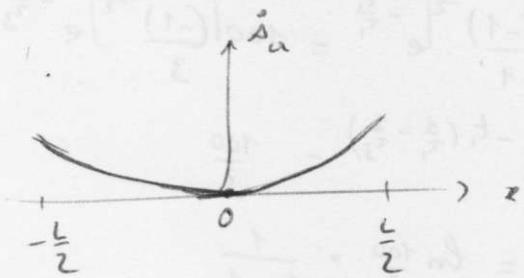
↑ entropie par unité de volume par unité de temps

Il est normal d'avoir une entropie créée par unité de temps d'autant plus grande que la température est inhomogène dans le matériau (càd  $\frac{\partial T}{\partial x}$  grand).

La conductivité thermique  $\lambda$  accélère

les phénomènes de transport pour de grandes valeurs de  $\lambda$  donc accroissent la variation d'entropie dans une même durée. ④

IV 6) b) revoir les courbes de  $T(x)$  en III 1).



$\dot{S}_{\text{u}}$  est max aux bords, à  $t = 0$  car c'est à cet instant et sur les bords qu'on a un écart extrême de température avec la source.