

Oscillations d'une tige

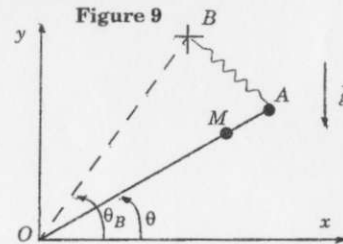
Sur une tige OA , de masse négligeable et de longueur a , est soudé à une distance $OM = b$ ($b < a$) un point matériel de masse m . Cette tige peut osciller sans frottement autour de l'axe Oz horizontal du référentiel $(Oxyz)$: vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, et sa position est repérée par l'angle

$$\theta = (\vec{e}_x, \vec{OA}).$$

Un ressort relie l'extrémité A de la tige à un point B fixe dont la position est définie par la longueur $OB = a$ et l'angle constant

$$\theta_B = (\vec{e}_x, \vec{OB});$$

ce ressort exerce sur la tige en A une force $\vec{F}$ proportionnelle à sa longueur soit $\vec{F} = k \cdot \vec{AB}$ (k désignant une constante positive). Enfin, l'air ambiant exerce sur la tige un couple de frottement fluide $\vec{\Gamma} = -h\dot{\theta} \vec{e}_z$ de faible intensité. L'accélération de la pesanteur vaut $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (figure 9).



IV.A - Montrer que le moment cinétique de la tige OA dans le référentiel $(Oxyz)$ se met sous la forme :

$$\vec{L}_0 = \alpha m b^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

et donner la valeur de la constante α .

IV.B - Le référentiel $(Oxyz)$ lié au sol est supposé galiléen.

IV.B.1) En appliquant le théorème du moment cinétique en O à la tige OA , dans le référentiel $(Oxyz)$, en projection sur l'axe Oz , déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait l'angle θ .

IV.B.2) Quelle est la position d'équilibre θ_E de la tige ? On souhaite que θ_E soit nul. Quelles conditions doivent vérifier les différents paramètres pour qu'il en soit ainsi ? On supposera cette condition remplie dans toute la suite.

IV.C - On suppose que le sol, et donc le référentiel $(Oxyz)$, est animé d'un mouvement de translation vertical et sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude y_0 soit :

$$y = y_0 \cos \omega t.$$

IV.C.1) Quelle est, dans le référentiel non galiléen $(Oxyz)$, l'expression de la force d'inertie d'entraînement qui s'exerce sur la tige OA ? Quelle est celle de

son moment par rapport à O ? Quelles sont les expressions correspondantes relatives à la force d'inertie de Coriolis ?

IV.C.2) En appliquant le théorème du moment cinétique en O à la tige OA , dans le référentiel $(Oxyz)$, en projection sur l'axe Oz , déterminer la nouvelle équation différentielle à laquelle satisfait l'angle θ .

IV.C.3) On pose

$$\omega_0^2 = \frac{g}{b \tan \theta_B}, \quad 2\lambda \omega_0 = \frac{h}{mb^2} \quad \text{et on suppose } \lambda \ll 1.$$

On suppose que θ reste petit et, en régime sinusoïdal établi, on cherche une solution de la forme $\theta = \theta_0 \cos(\omega t - \varphi)$. Exprimer l'amplitude θ_0 des oscillations en fonction de $y_0, \lambda, \omega_0, b$ et ω .

IV.C.4) Quelle est la valeur maximale $\theta_{0 \text{ Max}}$ de l'amplitude θ_0 des oscillations ? Pour quelle valeur de la pulsation est-elle atteinte (ne pas oublier que $\lambda \ll 1$) ? Déterminer également la valeur de l'acuité A de la résonance.

IV.C.5) Tracer le graphe du rapport

$$\frac{b \theta_0}{y_0}$$

en fonction du rapport

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

IV.C.6) Quel peut être l'intérêt de ce dispositif ?

IV.C.7) Application numérique : on donne $b = 10 \text{ cm}$, $\lambda = 0,1$. Le sol vibre à la fréquence $f = 0,1 \text{ Hz}$ avec une amplitude $y_0 = 1 \text{ mm}$. Quel paramètre peut-on facilement régler pour obtenir la résonance de la tige à la fréquence f de vibration du sol ? Donner la valeur numérique correspondante de ce paramètre. Calculer la valeur numérique de $\theta_{0 \text{ Max}}$.

... FIN ...

L'acuité = le facteur de qualité Q
En rappelant l'écriture canonique de l'oscillateur amorti, on peut sans calculs, trouver A .

IV A) $\vec{L}_0 = m \vec{OA} \wedge \vec{v}(A) = m b \vec{u}_1 \wedge b \dot{\theta} \vec{u}_0$
 $\vec{L}_0 = m b^2 \dot{\theta} \vec{e}_3$ ($\alpha=1$)

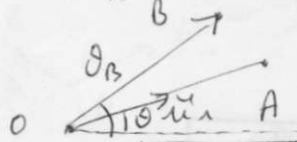
B) 1) T.N.C en O dans R galiléen appliqué à m.

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{OA} \wedge \vec{F} + \vec{OA} \wedge \vec{F} + \vec{F} + \underbrace{\vec{M}}_{\text{Réaction d'axe}}$$

nul car pas de frottement

$$m b^2 \ddot{\theta} \vec{e}_3 = -m b g \cos \theta \vec{e}_3 + b \vec{u}_1 \wedge k \vec{AB} - b \dot{\theta} \vec{e}_3 + \vec{0}$$

$$a \vec{u}_1 \wedge k \vec{AB} = k a \vec{u}_1 \wedge (\vec{AO} + \vec{OB}) = k a \vec{u}_1 \wedge \vec{OB}$$



$$\vec{u}_1 \wedge \vec{OB} = a \sin(\theta_B - \theta) \vec{u}_3$$

donc $m b^2 \ddot{\theta} = -m b g \cos \theta + k a^2 \sin(\theta_B - \theta) - b \dot{\theta}$

Si on dans le triangle OAB $\widehat{AOB} = \theta_B - \theta$

le triangle est isocèle $\widehat{B} = \widehat{A}$

or $\widehat{O} + \widehat{B} + \widehat{A} = \pi$ donc $\widehat{OAB} = \frac{1}{2}(\pi - (\theta_B - \theta))$

d'où l'angle entre $\vec{AB}$ et $\vec{u}_1$: $\pi - \widehat{OAB}$

$$\text{soit } \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\theta_B - \theta)$$

De plus AB est la base du triangle isocèle

donc $AB = 2a \sin \frac{\theta_B - \theta}{2}$

On utilise enfin $\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\theta_B - \theta)) = \cos \frac{\theta_B - \theta}{2}$

$$\text{et } \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$m b^2 \ddot{\theta} = -m b g \cos \theta + k a^2 \sin(\theta_B - \theta) - b \dot{\theta}$$

B2) Equilibre pour $\ddot{\theta} = 0$ et $\dot{\theta} = 0$

$$m b g \cos \theta_E = k a^2 \sin(\theta_B - \theta_E)$$

sachant $\theta_E = 0 \rightarrow m b g = k a^2 \sin \theta_B$

C1) Référentiel non galiléen en translation

donc $\vec{a}_e = \vec{a}(0) = -y_0 \omega^2 \cos \omega t \vec{e}_y$

d'où $\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e = m y_0 \omega^2 \cos \omega t \vec{e}_y$

Elle est appliquée en P là où il y a de la masse : $\vec{M}_{F_{ie}/0} = \vec{OP} \wedge \vec{F}_{ie} = m y_0 \omega^2 \cos \omega t \vec{e}_3$

$$\vec{M}_{F_{ie}/0} = m y_0 \omega^2 \cos \omega t b \cos \theta \vec{e}_3$$

$$\vec{F}_{ic} = \vec{0} \quad \text{car le référentiel est en translation (1)}$$

$$\vec{M}_{F_{ic}/0} = \vec{0} \quad \text{par conséquent}$$

C2) T.N.C / 0 à la tige dans R non galiléen

$$m b^2 \ddot{\theta} = -m b g \cos \theta + k a^2 \sin(\theta_B - \theta) - b \dot{\theta} + m y_0 \omega^2 \cos \omega t$$

C3) $\sin(\theta_B - \theta) = \sin \theta_B \cos \theta - \cos \theta_B \sin \theta$

θ petit : $\sin(\theta_B - \theta) = \sin \theta_B - \cos \theta_B \cdot \theta$
 $\cos \theta = 1$

$$m b^2 \ddot{\theta} = -m b g + k a^2 (\sin \theta_B - \cos \theta_B \theta) - b \dot{\theta} + m y_0 \omega^2 \cos \omega t$$

Avec le sachant de $\theta_E = 0$ cela mène à :

$$m b^2 \ddot{\theta} = -k a^2 \cos \theta_B \theta - b \dot{\theta} + m y_0 \omega^2 \cos \omega t$$

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m b^2} \dot{\theta} + \frac{k a^2 \cos \theta_B}{m b^2} \theta = \frac{y_0 \omega^2}{b} \cos \omega t$$

Comme $k a^2 \sin \theta_B = m b g$ on obtient :

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m b^2} \dot{\theta} + \frac{g \cos \theta_B}{b \sin \theta_B} \theta = \frac{y_0 \omega^2}{b} \cos \omega t$$

$$\ddot{\theta} + 2\lambda \omega_0 \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{y_0 \omega^2}{b} \cos \omega t$$

En complexe :

$$(-\omega^2 + 2j\lambda\omega_0\omega + \omega_0^2)\theta_0 = \frac{y_0 \omega^2}{b}$$

$$\theta_0 = \frac{y_0 \omega^2}{b} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_0^2 \omega^2}}$$

C4) Divisons par ω^2 haut et bas

$$\theta_0 = \frac{y_0}{b} \frac{1}{\sqrt{(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1)^2 + 4\lambda^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$$

ainsi la variable apparaît seulement au dénominateur

Pour $x = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ le max de θ_0 est celui

de l'extrémum de $(x-1)^2 + 4\lambda^2 x$, c'est

par $2(x-1) + 4\lambda^2 = 0$ soit $x = 1 - 2\lambda^2$

Comme $\lambda \ll 1$ $x \approx 1$ soit $\omega = \omega_0$

On obtient $\theta_{0 \max}$ par ω_0

Alors $\theta_{0 \max} = \frac{y_0}{2b\lambda}$

On se rappelle l'équation canonique d'un oscillateur amorti

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \theta_0 \cos \omega t$$

Q représente le facteur de qualité ou l'acuité de la résonance.

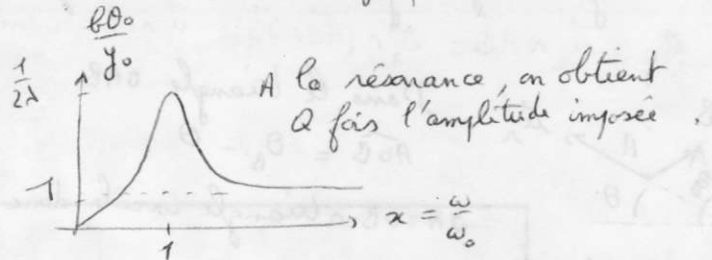
Par comparaison avec $\ddot{\theta} + 2\lambda \omega_0 \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{y_0 \omega^2}{b} \cos \omega t$ on déduit que

$$Q \equiv \frac{1}{2\lambda} \gg 1$$

$$(5) \frac{b\theta_0}{y_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^2 + \frac{4\lambda^2}{x^2}}}$$

avec cette fois $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

TBF $x \rightarrow 0$	TBF $x \rightarrow \infty$
0	1



(6) C'est un filtre passe-haut.
A THF θ_0 reproduit bien l'amplitude imposée ; cela peut servir de sismographe

$$(7) \text{ On souhaite } \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{b \tan \theta_B}}$$

Il suffit de modifier l'angle θ_B pour obtenir la pulsation souhaitée.

$$\tan \theta_B = \frac{g}{b \omega^2} = \frac{9,8}{0,1 \times 4\pi^2 \times 0,1^2}$$

$$\text{d'où } \theta_B = 90^\circ$$

$$\text{et alors } \theta_{\max} = \frac{y_0}{2\lambda b} = \frac{10^{-3}}{2 \times 0,1 \times 0,1} = 0,05 \text{ rad} = 2,8^\circ$$