PARTIE II– Ondes de grande longueur d'onde à la surface de l'eau

~~De manière surprenante, le formalisme précédent~~ On s'intéresse aux ondes de surface de grande longueur d'onde à la surface libre de l'eau d'un canal sous l'effet du champ de pesanteur.

Soit un canal placé dans un repère galiléen tel que l'axe Oz définisse la verticale. Le champ de pesanteur **g** est défini selon Oz et on prendra dans cette partie g=10 m.s^{-2}.

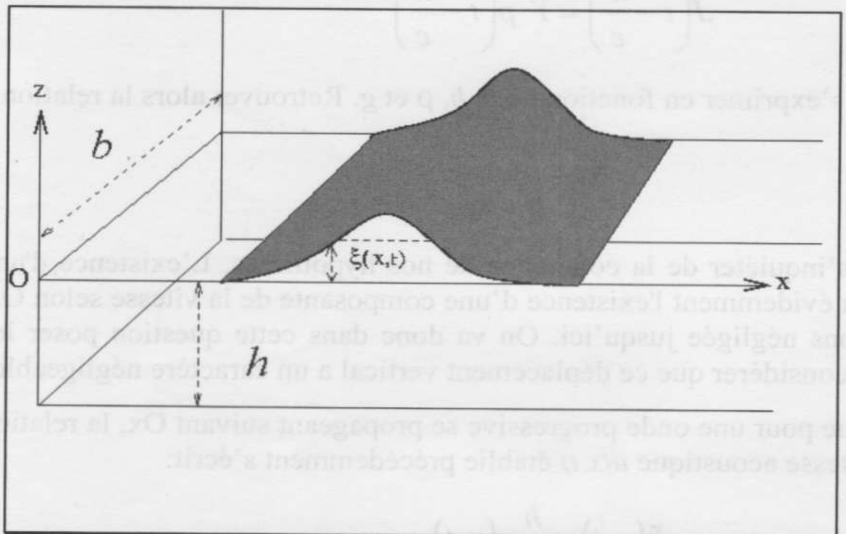

Figure 4 : Canal « idéal » rempli d'un fluide incompressible où se propage une onde acoustique en

Le canal est supposé tout d'abord idéal (dimension infinie selon l'axe Ox). Soit A_0 sa section droite à l'équilibre et b sa largeur (selon Oy). La profondeur à l'équilibre est h et on a bien évidemment $A_0 = bh$.

On s'intéresse à une perturbation de la surface $\xi(x,t)$ (mesurée suivant l'axe Oz) que l'on supposera indépendante de y. La vitesse du fluide est supposée telle que sa composante selon Oz est négligeable vis à vis de sa composante selon Ox. On posera donc :

$$\mathbf{u} = u(x,t).\hat{\mathbf{u}}_x.$$

Dans toute cette partie, le fluide sera supposé parfait, incompressible, de masse volumique ρ_0 invariable et l'on ne fera donc plus la distinction entre ρ et ρ_0.

❑ **19** –A partir de l'équation d'Euler, justifier que la pression au sein du fluide varie suivant l'axe Oz de la même manière qu'en hydrostatique.

En déduire que si la surface est perturbée de $\xi(x,t)$, la surpression (par rapport à la distribution d'équilibre) est uniforme à la cote x et vaut $\rho\, g\, \xi(x,t)$.

~~Comme dans la partie I.2,~~ On définit la distensibilité (isentropique) D_S par la relation

$$D_S = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial P}\right)_S$$

Montrer que l'on a ~~ici~~ la relation

$$D_S = \frac{1}{\rho\, g\, h}$$

Commentez les cas limites $h \to 0$ et $h \to \infty$.

❑ **20** – Montrer que l'équation de conservation de la masse permet, moyennant certaines approximations, d'écrire au premier ordre l'expression

$$D_S \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$$

Montrer que la célérité des ondes c s'exprime comme :

$$c = \sqrt{hg}$$

De même, comme à la question 9, On définit l'admittance caractéristique Y qui relie la surpression et le débit pour une onde progressive par :
P J

$$J\left(t - \frac{x}{c}\right) = Y\, p\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Montrer qu'elle peut s'exprimer en fonction de b, h, ρ et g. Retrouver alors la relation:

$$Y = \frac{A_0}{\rho\, c}$$

❑ **21** – On pourrait s'inquiéter de la cohérence de nos hypothèses. L'existence d'une distensibilité suppose bien évidemment l'existence d'une composante de la vitesse selon Oz, composante que nous avons négligée jusqu'ici. On va donc dans cette question poser les hypothèses permettant de considérer que ce déplacement vertical a un caractère négligeable.

Pour cela, montrer que pour une onde progressive se propageant suivant Ox, la relation entre l'amplitude ξ et la vitesse acoustique $u(x,t)$ établie précédemment s'écrit:

$$\xi(x,t) = \frac{h}{c} u(x,t)$$

Pour une onde sinusoïdale de fréquence f, et de longueur d'onde λ, montrer que la vitesse correspondante $\partial\xi/\partial t$ est négligeable devant $u(x,t)$ si $h << \lambda$.

Ce modèle grossier va être appliqué à l'étude de phénomène géophysique comme l'évolution d'un régime de vague en profondeur variable ou au passage d'un détroit, ou bien l'évolution d'un raz de marée (tsunami) sur l'Océan.

❑ **22** –On autorise maintenant la section du canal à varier en largeur et en profondeur suffisamment lentement pour que l'on puisse ignorer l'existence d'ondes réfléchies. On admettra la conservation du flux d'énergie. $\Phi = pAu$
Montrer que Φ est homogène à une puissance
Montrer que l'amplitude Z de l'onde varie en fonction de la profondeur h et de la largeur b suivant la relation de proportionnalité (que l'on appellera ici loi de Green) :

$$Z \propto \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}\, h^{\frac{1}{4}}}.$$

❑ **23** – Le tremblement de Terre de Sumatra du 26 décembre 2004 avait son épicentre situé sur l'Océan Indien : le tsunami qui en a résulté fut l'un des plus violents connus. Sur la côte, à Banda Aceh, l'amplitude a dépassé les 30 m. A l'aide de la loi de Green établie à la question 22, calculer l'amplitude pour un fond de 10 m en supposant que l'amplitude au milieu de l'Océan Indien était de 3 m en un point où la profondeur est de 4000m. Le résultat est-il réaliste ? Est-il effectivement modélisable par l'approche proposée ?

En reprenant les résultats de la question 20, on va montrer que le modèle proposé est compatible avec les mesures de vitesse reprises dans le tableau I.

Profondeur de l'Océan en m	Vitesse en km/h	Longueur d'onde en km
7000	943	282
4000	713	213
2000	504	151
200	159	48
50	79	23
10	38	10,6

Tableau I : vitesse d'un tsunami et longueur d'onde correspondante en fonction de la bathymétrie

Tracer la longueur d'onde du tsunami en fonction de sa vitesse : montrer que la loi vérifiée par la longueur d'onde est linéaire, excepté pour certaines valeurs de la profondeur. Pouvez-vous donner des raisons pour laquelle le modèle étudié ne s'applique plus ?

Les mesures ont montré qu'il a fallu environ 100 minutes pour que le tsunami, parti de Sumatra, atteigne le Sri Lanka situé à 2000 km. Commentez cette observation à partir des informations du tableau I.

question indépendante

❑ **24** – Le modèle étudié ici n'est donc valide que pour des profondeurs suffisamment grandes. On admettra qu'un autre modèle permettant une description plus correcte des vagues est décrit par un potentiel des vitesses $\Phi(x, z, t)$:

$$\Phi(x,z,t) = \Phi_0 \cosh(k(z+h))\cos(\omega t - kx) \text{ avec } \omega^2 = g\,k\,\tanh(kh)$$

(dans cette question sinh, cosh et tanh représentent le sinus hyperbolique, le cosinus hyperbolique et la tangente hyperbolique) et on admettra que la vitesse acoustique s'écrit alors $\mathbf{v} = \mathbf{grad}(\Phi)$, et, qu'au premier ordre, on peut écrire :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0}$$

Rappeler la définition de la vitesse de phase v_φ et celle de la vitesse de groupe v_g.

Montrer que la vitesse de phase s'écrit :

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh(kh)}$$

et que la vitesse de groupe peut s'exprimer sous la forme :

$$v_g = \frac{v_\varphi}{2}\left(1 + \frac{kh}{\sinh(kh)\cosh(kh)}\right)$$

❑ **25** – Dans le cas d'une longueur d'onde grande vis-à-vis de la profondeur ($k\,h \ll 1$) , que deviennent les expressions de la relation de dispersion, de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe ? Montrer que l'on retrouve, pour la vitesse de phase, le résultat de la question 20.

Quelle est alors la relation entre vitesse de phase et vitesse de groupe ? Comment appelle-t-on un milieu qui admet une relation de dispersion de ce type ?

❑ **26** – Inversement, si la longueur d'onde devient petite vis-à-vis de la profondeur, quelle est alors la relation entre vitesse de phase et vitesse de groupe ?

Cette analyse est-elle applicable au comportement d'un tsunami au voisinage des côtes ? Quelle est en réalité la vraie raison des écarts au modèle au voisinage des côtes ?

. FIN DE LA SECONDE PARTIE

FIN DE L'ÉPREUVE

II 19) . Euler : $\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}.\vec{grad})\vec{u} = -\vec{grad}\, p + \rho_0 \vec{g}$ $\Big\} \Rightarrow$ Projections : $\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$; $0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_0 g$

. $\vec{u} \stackrel{v}{=} u(x,t)\,\vec{u}_x$.

C'est donc le fait que $\vec{u} /\!/ \vec{u}_x$ qui conduit à $\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho_0 g}$ comme en hydrostatique

. pression d'équilibre : p_0
. pression hors équil : $p_0 + p$

$\Rightarrow (p_0+p) - p_0 = \rho_0 g \xi$
soit $\boxed{p = \rho_0 g \xi}$

. $D_s \stackrel{v}{=} \frac{1}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial p}\right)_s$
. ici ∂p = surpression $= \rho_0 g \xi$
. $A \simeq A_0 = bh$
. $\partial A = b\xi$

$\Big\} \Rightarrow \boxed{D_s = \frac{1}{bh}\frac{b\xi}{\rho_0 g \xi} = \frac{1}{\rho_0 g h}}$. $\boxed{D_s \xrightarrow[h\to 0]{} \infty \quad D_s \xrightarrow[h\to\infty]{} 0}$

20) . Fluide incompressible : ce qui rentre en x dt − ce qui sort en $x+dx$, dt = variation de masse dt entre x et $x+dx$

$\rightarrow u(x)A(x) - A(x+dx)u(x+dx) = \frac{\partial \xi}{\partial t} b\, dx$

$\rightarrow \boxed{-\frac{\partial(Au)}{\partial x} = b\frac{\partial \xi}{\partial t}}$

. à $\partial\xi$ correspond ∂A tel que $\partial A = b\partial\xi$ $\Big\} \Rightarrow -\frac{\partial(Au)}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial t}$ $\Big| \Rightarrow -\frac{\partial(Au)}{\partial x} = AD_s\frac{\partial p}{\partial t}$

. $D_s \stackrel{v}{=} \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial p} \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial t} = AD_s\frac{\partial p}{\partial t}$

→ Pour obtenir la formule de l'énoncé, il faudrait que $\frac{\partial(Au)}{\partial x} = A\frac{\partial u}{\partial x}$ où A désigne la valeur moyenne

Simplifier par A → $\boxed{D_s\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0}$

. remplacer D_s par $\frac{1}{\rho_0 g h}$ → $\frac{1}{\rho_0 gh}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\Big] \xRightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{1}{\rho_0 gh}\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

. prendre la proj$^{\circ}$ Euler selon x (cf 19) **linéarisée** $\left(u\frac{\partial u}{\partial x} \ll \rho_0\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ $\rho_0\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ $\xRightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} \rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial t}$ $\Big| \Rightarrow \frac{\rho_0}{\rho_0 gh}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{gh}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$ → $\boxed{c = \sqrt{hg}}$

$\left[\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial(t-\frac{x}{c})}\cdot\frac{\partial(t-\frac{x}{c})}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial(t-\frac{x}{c})}\cdot\left(-\frac{1}{c}\right)\right]$

$\left(\partial p/\partial t = \frac{\partial p}{\partial(t-\frac{x}{c})}\cdot\frac{\partial(t-\frac{x}{c})}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial(t-\frac{x}{c})}\right.$ et

. $J \stackrel{v}{=} Au \simeq A_0 u$
. $D_s\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ → $D_s\frac{\partial p}{\partial(t-\frac{x}{c})} + \left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\partial u}{\partial(t-\frac{x}{c})} = 0$ $\Big\} \xRightarrow{\text{éliminer } u} D_s\frac{\partial p}{\partial(t-\frac{x}{c})} - \frac{1}{cA_0}\frac{\partial J}{\partial(t-\frac{x}{c})} = 0$

. intégrer → $D_s p = \frac{J}{cA_0}$ (à l'équilibre J et p sont nuls donc pas de constante d'intégration)

. cf 19) $D_s = \frac{1}{\rho_0 gh}$
. cf 20) $c = \sqrt{hg}$

$\Big\rangle \Rightarrow \boxed{J = D_s A_0 c\, p = \frac{A_0 c}{\rho_0 c^2} p = \frac{A_0}{\rho_0 c} p}$ on a bien $J = Y p$ avec $Y = \frac{A_0}{\rho_0 c}$

21) . $J = A_0 u$
. $D_s p = \frac{J}{cA_0}$
$\Big\} \xRightarrow{\text{éliminer } J} \boxed{u = D_s c\, p}$ $\Big\} \Rightarrow u = D_s c \rho_0 g \xi = \frac{c}{h}\xi \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{h}{c}u}$

. cf 19) $p = \rho_0 g\xi$ et $D_s = \frac{1}{\rho_0 gh}$

. $\frac{\partial \xi}{\partial t} \sim \omega\xi \sim \xi f$
. $\xi = \frac{h}{c}u$
$\Big| \Rightarrow \frac{\partial\xi}{\partial t} \ll u \iff \xi f \ll u \iff f\frac{hu}{c} \ll u \iff h \ll \frac{c}{f}$ $\boxed{h \ll \lambda}$

22) . Flux d'énergie : ϕ = puissance = $\frac{\text{énergie}}{\text{temp}}$ = $\frac{p \cdot \text{volume}}{\text{temp}}$ = $p \cdot$ surface $\cdot$ $\frac{\text{longueur}}{\text{temp}}$

$$\rightarrow \phi = p \cdot A \cdot u = p \cdot J = Y p^2 = Y(\rho_0 g)^2 \xi^2 = \frac{A_0 \rho_0 g^2}{c} \xi^2$$

. $J = Au$

. $J = Yp$

. $p = \rho_0 g \xi$

. $Y = \frac{A_0}{\rho c}$

$\Rightarrow \langle\phi\rangle = \frac{A_0 \rho_0 g^2}{2c} Z^2$

. amplitude Z de l'onde, càd de ξ : $\langle \xi^2 \rangle = \frac{Z^2}{2}$

. $c = \sqrt{hg}$ $\longrightarrow$ $\langle\phi\rangle = \frac{A_0 \rho_0 g^2}{2\sqrt{hg}} Z^2$

. $A_0 = bh$ $\longrightarrow$ $\langle\phi\rangle = b\sqrt{h}\,\frac{\rho_0 g^{\frac{3}{2}}}{2} Z^2 = \text{cte}\; b\sqrt{h}\, Z^2$

. hyp : "conservation du flux d'énergie"

$\Rightarrow b\sqrt{h}\, Z^2 = \text{cte}$

$\Downarrow$

$$\boxed{Z \propto \frac{1}{b^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{4}}}}$$

23) . Les données sont à largeur b constante

h (m)	Z (m)
4000	3
10	Z_{10}

loi de Green $\Rightarrow$ $\underline{Z_{10}} = 3\left(\frac{4000}{10}\right)^{\frac{1}{4}} = \underline{13,4 \text{ m}}$

ordre de grandeur relativt correct mais en-dessous de la réalité (30 m)

$\rightarrow$ modèle simpliste.

. Tracé $\longrightarrow$ loi linéaire

. La + gde vitesse de propagation est au mieux 1000 km/h
Il faut au moins 2h pour parcourir 2000 km. On est au-dessus des 100 minutes

24) . $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh(kh)}$

. ω^2 donné

. $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ avec $2\omega d\omega = g\, dk \left[\tanh(kh) + \frac{h\,k}{ch^2(kh)}\right]$

$\frac{d\tanh(x)}{dx} = \frac{1}{ch^2(x)}$

$$v_g = \frac{g}{2\omega}\left[\tanh(kh) + \frac{hk}{ch^2(kh)}\right] = \frac{g\tanh(kh)}{2\sqrt{gk\tanh(kh)}}\left[1 + \frac{hk}{ch(kh)\,sh(kh)}\right]$$

$$\boxed{v_g = \frac{v_\varphi}{2}\left[1 + \frac{kh}{sh(kh)\,ch(kh)}\right]}$$

25) . si $kh \ll 1$ $\tanh(kh) \simeq kh$ donc $\boxed{v_\varphi = \sqrt{gh}}$ $\boxed{v_g \simeq v_\varphi}$ $\boxed{\omega = \sqrt{gh}\,k}$

$sh(kh) \simeq kh$

$ch(kh) \simeq 1$

<u>milieu non dispersif</u>

on retrouve $c = \sqrt{gh}$ du 20)

26) . si $kh \rightarrow \infty$ $\tanh(kh) \simeq 1$ donc $\boxed{v_\varphi = \sqrt{\frac{g}{k}}}$ v_g

$sh(kh) \rightarrow \infty$

$ch(kh) \rightarrow \infty$?

$\boxed{v_g = \frac{v_\varphi}{2}}$ $\boxed{\omega = \sqrt{gk}}$ milieu <u>dispersif</u>

cause écarts : fond variable
<u>côtes</u>