PROBLÈME

Procédés physiques de transmission d'un signal

Dans ce problème, on se propose d'étudier et de comparer le câble coaxial et la fibre optique comme supports de distribution de signaux. La **partie I** traite du câble coaxial. Dans la sous-partie **I.1**, on le supposera parfait, tandis que la sous-partie **I.2** visera à en affiner la modélisation. La **partie II** traite de la fibre optique. Après avoir rappelé quelques résultats généraux d'optique géométrique dans la sous-partie **II.1**, on détaillera la propagation des rayons dans la fibre à saut d'indice (sous-partie **II.2**) puis dans la fibre optique à gradient d'indice (sous-partie **II.3**), ce qui nous conduira à analyser une technique d'augmentation de la capacité de transmission : le multiplexage (sous-partie **II.4**). La sous-partie **II.5** est consacrée aux pertes associées à l'usage de la fibre optique.

Partie I – Le câble coaxial

Un câble coaxial, représenté en **figure 1**, est constitué d'un fil de cuivre cylindrique central, de rayon a, appelé âme, et d'un conducteur cylindrique creux de même axe de révolution, également en cuivre, appelé gaine et de rayon intérieur b. Un isolant occupe tout l'espace entre l'âme et la gaine. À l'entrée du câble coaxial, on place un générateur de tension, non représenté, entre l'âme et la gaine.

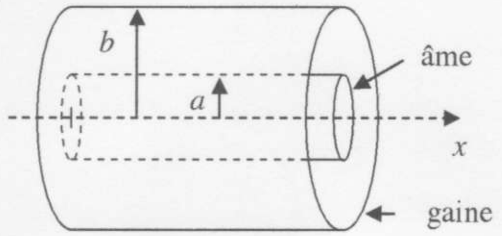


Figure 1 – Structure d'un câble coaxial

On modélise le câble coaxial, milieu continu, par une ligne électrique à constantes réparties, pour laquelle on note respectivement Λ et Γ les inductance et capacité par unité de longueur. La ligne est modélisée par une succession de tronçons élémentaires de longueur dx, considérés comme des quadripôles élémentaires auxquels sont associées une inductance $\mathrm{d}L = \Lambda \cdot \mathrm{d}x$ et une capacité $\mathrm{d}C = \Gamma \cdot \mathrm{d}x$. Le schéma électrique d'un tronçon de ligne de longueur dx est représenté en **figure 2**. Dans ce modèle, on néglige toute perte résistive. On note $i(x,t)$ et $i(x+\mathrm{d}x,t)$ les intensités des courants dans la ligne, à l'instant t, aux abscisses respectives x et $x+\mathrm{d}x$. On note $u(x,t)$ et $u(x+\mathrm{d}x,t)$ les tensions entre l'âme et la gaine, à l'instant t, aux abscisses respectives x et $x+\mathrm{d}x$. Les tensions et courants sont des signaux sinusoïdaux alternatifs de fréquence f.

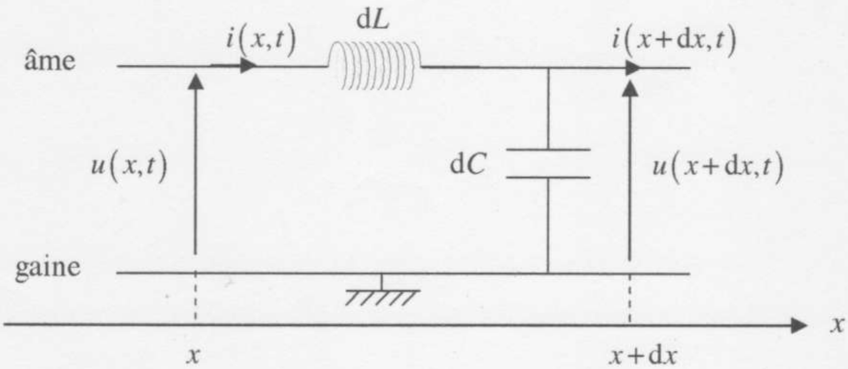


Figure 2 – Schéma électrique d'un tronçon de ligne de longueur dx

I.1 – Le câble coaxial parfait

Q1. Comment le courant circulant dans l'âme revient-il jusqu'au générateur de tension ?

Q2. Démontrer que les deux équations différentielles couplées sur u et i sont : $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\Lambda \cdot \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -\Gamma \cdot \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$.

Vous considérerez, notamment, que : $\dfrac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ à l'ordre 0 en dx.

Par ailleurs, on rappelle que, puisque dx tend vers zéro, nous avons les relations suivantes :

$$u(x+dx,t)-u(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\cdot dx \quad \text{et} \quad i(x+dx,t)-i(x,t)=\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}\cdot dx.$$

Q3. Montrer que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ obéissent à deux équations de propagation de D'Alembert. En déduire l'expression de la vitesse de propagation v des signaux dans la ligne en fonction de Λ et Γ. Vérifier sa dimension.

Q4. On étudie les solutions des équations de D'Alembert en régime permanent sinusoïdal. La tension $u(x,t)$ correspond à la partie réelle de la tension complexe $\underline{u}(x,t)$. L'intensité $i(x,t)$ correspond à la partie réelle de l'intensité complexe $\underline{i}(x,t)$. On propose, avec j le nombre complexe tel que $j^2=-1$, des solutions complexes des équations de propagation de la forme :

$$\underline{u}(x,t)=\rho\cdot i_0\cdot\exp\left(j(\omega\cdot t-k\cdot x)\right)-\rho\cdot i_1\cdot\exp\left(j(\omega\cdot t+k\cdot x)\right)$$

et

$$\underline{i}(x,t)=i_0\cdot\exp\left(j(\omega\cdot t-k\cdot x)\right)+i_1\cdot\exp\left(j(\omega\cdot t+k\cdot x)\right).$$

Vérifier que $\underline{u}(x,t)$ est compatible avec l'équation trouvée à la question **Q3**, à une condition sur v, ω et k qu'on explicitera.
Donner une interprétation physique de chacun des deux termes présents dans les expressions de $\underline{u}(x,t)$ et $\underline{i}(x,t)$.

Pour la suite, nous considérerons toujours i_0 non nul.

Q5. Donner l'expression de ρ en fonction de l'impédance caractéristique $Z_c=\sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}$.
Préciser son unité.

Q6. L'extrémité du câble, de longueur d, est fermée sur une impédance $\underline{Z}$. Exprimer i_1 en fonction de : i_0, $\underline{Z}$, ρ, k et d.

Q7. L'impédance totale de la ligne vue depuis l'abscisse x, notée $\underline{Z_l}(x)$, a pour expression : $\underline{Z_l}(x)=\dfrac{\underline{u}(x,t)}{\underline{i}(x,t)}$. Donner l'expression de $\underline{Z_l}(x)$ en fonction de : $\underline{Z}$, ρ, k, d et x. À quelle condition sur $\underline{Z}$, l'impédance $\underline{Z_l}(x)$ est indépendante de l'abscisse x ? Quelle est alors l'expression de $\underline{Z_l}(x)$? Que dire dans ce cas de i_1 et que peut-on alors conclure ?

Quelle impédance mettre en bout de câble pour s'assurer, dans le cadre des télécommunications, que la puissance transmise est optimale ?

I.2 – Le câble coaxial avec pertes

La modélisation précédente ne décrit qu'imparfaitement la propagation du signal. Aussi on se propose d'étudier le modèle représenté en **figure 3** dans lequel on a inséré une résistance $\mathrm{d}R = r \cdot \mathrm{d}x$ par rapport au modèle de la **figure 2** de la page 2.

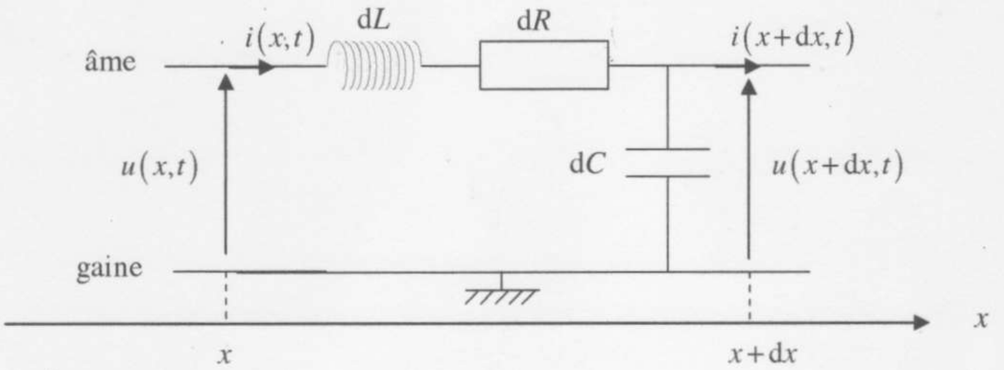


Figure 3 – Schéma électrique d'un tronçon de ligne imparfait de longueur $\mathrm{d}x$

Q8. Quelle est l'origine physique de la résistance $\mathrm{d}R$?

Q9. Montrer que l'équation de propagation de l'onde de tension $u(x,t)$ est :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \Lambda \cdot \Gamma \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + r \cdot \Gamma \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Q10. En considérant une solution de la forme $\underline{u}(x,t) = u_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - \underline{k} \cdot x))$ à l'équation de propagation précédente, dans laquelle $\underline{k}$ est une pulsation spatiale complexe, trouver l'équation de dispersion associée à la ligne.

Q11. On écrit $\underline{k}$ sous la forme : $\underline{k} = \alpha - j \cdot \beta$. Que représentent physiquement α et β ? Justifier, par un raisonnement physique, le signe de β lorsque $\alpha > 0$.

Q12. On définit l'atténuation linéique de puissance du signal entre le point d'entrée du câble coaxial en $x = 0$ et un point d'abscisse x par la grandeur A, exprimée en décibel par unité de longueur, $A = \dfrac{10 \cdot \log\left(\dfrac{P_0}{P(x)}\right)}{x} = \dfrac{\dfrac{10}{\ln 10} \cdot \ln\left(\dfrac{P_0}{P(x)}\right)}{x}$, avec $P(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{u}(x,t) \cdot \underline{i}^*(x,t)\right)$ la puissance moyenne de l'onde à l'abscisse x et $P_0 = P(x=0) = \frac{1}{2} u_0 \cdot i_0$ la puissance moyenne de l'onde en entrée du câble.

En considérant que $\underline{i}(x,t) = i_0 \cdot \exp(j(\omega \cdot t - \underline{k} \cdot x))$, exprimer A en fonction de β.

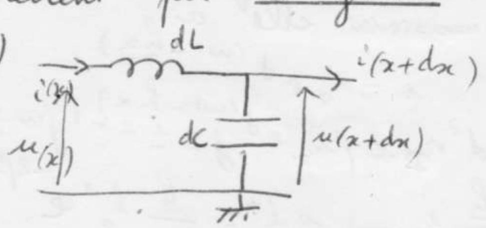
Q13. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, montrer que si $r \ll \Lambda \cdot \omega$, alors $A = \frac{10}{\ln 10} \cdot r \cdot \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$.

Q14. Par ailleurs, on montre que, lorsque $r \gg \Lambda \cdot \omega$, l'atténuation linéique de puissance a pour expression : $A = \frac{10}{\ln 10} \cdot \sqrt{2 \cdot r \cdot \Gamma \cdot \omega}$. Ainsi, au vu de cette équation et de celle de la question **Q13**, il semble que l'atténuation linéique de puissance progresse avec la fréquence puis devienne indépendante de celle-ci lorsque les effets inductifs prennent le pas sur les effets résistifs. Mais, en réalité, à cause d'un phénomène physique associé à la résistance r, en haute fréquence, r augmente avec la racine carrée de la fréquence. Nommer et expliquer ce phénomène.

CCP PC 18

1) Le courant circulant dans l'âme revient par <u>la gaine</u>

2)



<u>Aux bornes de dL</u> : $u(x) - u(x+dx) = dL\,\dfrac{\partial i}{\partial t}$

soit $-\dfrac{\partial u}{\partial x}\,dx = dL\,\dfrac{\partial i}{\partial t}$

avec $dL = \Lambda dx$ on a bien $(1)\ \boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \dfrac{\partial i}{\partial t}}$ (OK)

<u>Aux bornes de dC</u> : $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \left(i(x) - i(x+dx)\right)\dfrac{1}{dC}$

$= -\dfrac{\partial i}{\partial x}\,dx\,\dfrac{1}{dC}$

Avec $dC = \Gamma dx$ on a bien $(2)\ \boxed{\dfrac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma\dfrac{\partial u}{\partial t}}$ (OK)

3) En faisant $\dfrac{\partial(1)}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial(2)}{\partial t}$ on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda\frac{\partial^2 i}{\partial x\partial t} = +\Lambda\Gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

soit $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda\Gamma\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$ D'Alembert

De même en faisant $\dfrac{\partial(1)}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial(2)}{\partial x}$ on obtient

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\Gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} = +\Gamma\Lambda\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

soit $\boxed{\dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \Lambda\Gamma\dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0}$ D'Alembert

Vitesse de propagation $\boxed{v = \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}}$

<u>Homogénéité</u> ? Equation de D'Alembert

$\Rightarrow [\Lambda\Gamma] \sim \dfrac{1}{\text{vitesse}^2}$

Electrocinétique (1) $[u] \sim [\Lambda][i][v]$

(2) $[i] \sim [\Gamma][u][v]$

donc (1)$\cdot$(2) : $[u][i] \sim [\Lambda\Gamma][u][i][v^2]$

soit $\boxed{\Lambda\Gamma \sim \dfrac{1}{\text{vitesse}^2}}$ OK

4) Injecter la solution proposée dans l'équation de D'Alembert :

$\rightarrow \dfrac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2} = -k^2\underline{u}$ car $\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} e^{j(\omega t - kx)} = -k^2 e^{j(\omega t - kx)} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} e^{j(\omega t + kx)} = -k^2 e^{j(\omega t + kx)} \end{cases}$

$\dfrac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = -\omega^2\underline{u}$

d'où $-k^2 + \dfrac{\omega^2}{v^2} = 0 \rightarrow \boxed{k = \dfrac{\omega}{v}}$

Les termes en $e^{j(\omega t - kx)}$ correspondent à une onde progressive dans le sens $x \nearrow$

Les termes en $e^{j(\omega t + kx)}$ correspondent à une onde progressive dans le sens $x \searrow$

5) D'après (1) en injectant $\underline{u}$ et $\underline{i}$:

$-jk\rho i_0 e^{j(\omega t - kx)} - jk\rho i_1 e^{j(\omega t + kx)} =$

$-\Lambda j\omega i_0 e^{j(\omega t - kx)} - \Lambda j\omega i_1 e^{j(\omega t + kx)}$

Pour être vérifiée $\forall x$ il faut identifier les termes en e^{-jkx} : $-jk\rho i_0 = -\Lambda j\omega i_0$

en e^{jkx} ; $-jk\rho i_1 = -\Lambda j\omega i_1$

ce qui conduit à : $\rho = \dfrac{\Lambda\omega}{k}$

Comme $\dfrac{\omega}{k} = v = \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$ $\Bigg\} \Rightarrow \rho = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}$

Donc $\boxed{\rho = Z_c = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}}$

Comme $[u] \sim \rho[i]$ on déduit $\rho \sim$ impédance <u>ou résistance</u>

<u>ρ se mesure donc en Ohm : Ω</u>

6) Condition limite à écrire en $x = d$

$u(x=d,t) = \underline{Z}\,i(x=d,t)$

$\Rightarrow \rho i_0 e^{-jkd} - \rho i_1 e^{jkd} = \underline{Z}\left(i_0 e^{-jkd} + i_1 e^{jkd}\right)$

$\Rightarrow i_1 = i_0\,\dfrac{\rho e^{-jkd} - Z e^{-jkd}}{\rho e^{jkd} + Z e^{jkd}}$

soit $\boxed{i_1 = i_0\,\dfrac{\rho - \underline{Z}}{\rho + \underline{Z}}\,e^{-2jkd}}$

7) Calcul de $\dfrac{\underline{u}}{\underline{i}} = \underbrace{\dfrac{\rho i_0 e^{j\omega t}\left(e^{-jkx} - \dfrac{\rho - Z}{\rho + Z}e^{-2jkd}e^{jkx}\right)}{i_0 e^{j\omega t}\left(e^{-jkx} + \dfrac{\rho - Z}{\rho + Z}e^{-2jkd}e^{jkx}\right)}}_{\text{c'est } Z_p(x)}$

On remarque que la très simple relation $\rho = Z$ conduit à $Z_\ell(x) = \rho$ indépendant de x

En reprenant 6) on trouve alors $\boxed{i_1 = 0}$

Conclusion : Si on ferme le cable sur une impédance égale à l'impédance caractéristique du cable, alors il n'y a aucune réflexion de l'onde de courant, ou de tension. On parle "d'adaptation d'impédance". La puissance transmise est optimale

8) Les métaux constituant gaine et âme ont une résistance

9) Aux bornes de $\{dL + dR\}$: $u(x) - u(x+dx) = dL\frac{\partial i}{\partial t} + dR\, i$

soit $-\frac{\partial u}{\partial x}dx = \Lambda dx\frac{\partial i}{\partial t} + r dx\, i$ (1')

Aux bornes de dC : $\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma\frac{\partial u}{\partial t}$ (2) (rien de changé)

Faisons $\frac{\partial(1')}{\partial x}$: $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Lambda\frac{\partial^2 i}{\partial x\partial t} + r\frac{\partial i}{\partial x}$

$$= \Lambda\frac{\partial^2 i}{\partial x\partial t} + r\left(-\Gamma\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Faisons $\frac{\partial(2)}{\partial t}$: $\frac{\partial^2 i}{\partial t\partial x} = -\Gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

d'où $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda\Gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - r\Gamma\frac{\partial u}{\partial t}$

soit $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Lambda\Gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + r\Gamma\frac{\partial u}{\partial t}}$ (OK)

10) Injecter la solution proposée :
$-k^2 = -\Lambda\Gamma\omega^2 + r\Gamma j\omega$

ou $\boxed{k^2 = \Lambda\Gamma\omega^2 - j r\Gamma\omega}$

11) $k = \alpha - j\beta$ $\quad\alpha = \text{Reel}(k)$ est lié à la propagation de l'onde.

$\beta = \text{Im}(k)$ est lié à l'atténuation de l'onde

$e^{j(\omega t - kx)}$ devient $\underbrace{e^{j(\omega t - \alpha x)}}_{\text{onde progressive vers } x\nearrow} \cdot \underbrace{e^{-\beta x}}$ ← décroissant quand $x\nearrow$

$e^{j(\omega t + kx)}$ devient $\underbrace{e^{j(\omega t + \alpha x)}}_{\text{onde progressive vers } x\searrow} e^{\beta x}$ ← décroît quand $x\searrow$

Pour que l'onde ne soit pas amplifiée, qu'elle se propage vers $x\nearrow$ ou vers $x\searrow$, il faut bien que $\beta > 0$

12) Enoncé : $\underline{i} = i_0 e^{j(\omega t - kx)}$

donc d'après (2) : $-jk\underline{i} = -\Gamma j\omega\underline{u}$

$\rightarrow \underline{u} = \frac{k}{\Gamma\omega}\underline{i} \rightarrow \underline{u}\,\underline{i}^* = \frac{k}{\Gamma\omega}i_0^2 e^{-2\beta x}$

$\rightarrow P(x) = \frac{1}{2}\frac{i_0^2\alpha}{\Gamma\omega}e^{-2\beta x}$

$P_0 = \frac{1}{2}\frac{i_0^2\alpha}{\Gamma\omega}$

d'où $\boxed{A = \frac{10}{\ln 10}\cdot 2\beta}$

13) Revenons à 10) en supposant comme le suggère l'énoncé que $r\omega \ll \Lambda\omega^2$

alors $k^2 = \Lambda\Gamma\omega^2\left(1 - j\frac{r\Gamma\omega}{\Lambda\Gamma\omega^2}\right)$

$$k \simeq \omega\sqrt{\Lambda\Gamma}\left(1 - \frac{1}{2}j\frac{r}{\Lambda\omega}\right)$$

donc $\boxed{\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}\, r}$

d'où $\boxed{A = \frac{10}{\ln 10}\sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}\, r}$ (OK)

14) Il s'agit de l'effet de peau

Quand la fréquence augmente beaucoup les champs $\vec{E}, \vec{B}$ pénètrent très peu dans le métal, le courant aussi. La section traversée par le courant s'amoindrit, la résistance augmente donc.