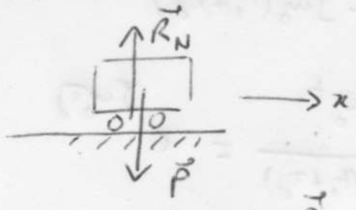
CCP TSI 19

(1)

1)



$\vec{P} \perp \vec{e}_x \quad \vec{R}_N \perp \vec{e}_x$

Pas de projection de $\vec{P}$ et $\vec{R}_N$ sur $\vec{e}_x$ donc n'interviennent pas dans le PFD projeté sur Ox

2) <u>Sans amortissement ni excitation</u>

$\vec{F}_k = m\ddot{x}\,\vec{e}_x \longrightarrow m\ddot{x} = -kx$

$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$ (OK)

3) $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ pulsation propre du système

En régime libre c'est la pulsation des oscillations de la structure.

$\boxed{B_0 = x_0}$ et $\boxed{\dot{x}_0 = A_0\,\omega_0}$

$\longrightarrow \boxed{x = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \frac{x_0}{\omega_0}\cos\omega_0 t}$

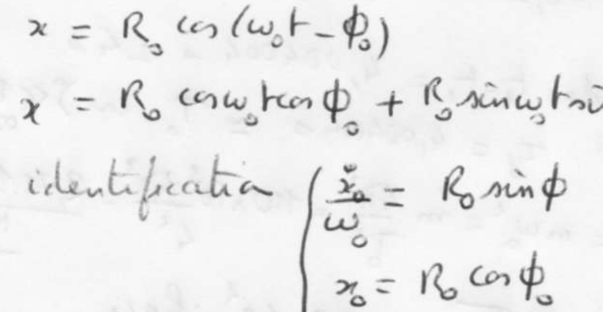
4) $x = R_0\cos(\omega_0 t - \phi_0)$

$x = R_0\cos\omega_0 t\cos\phi_0 + R_0\sin\omega_0 t\sin\phi_0$

Par identification $\begin{cases} \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} = R_0\sin\phi \\ x_0 = R_0\cos\phi_0 \end{cases}$

d'où $\boxed{R_0 = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2 + x_0^2} \qquad \tan\phi_0 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}}$

5)



cas où $\phi_0 > 0$

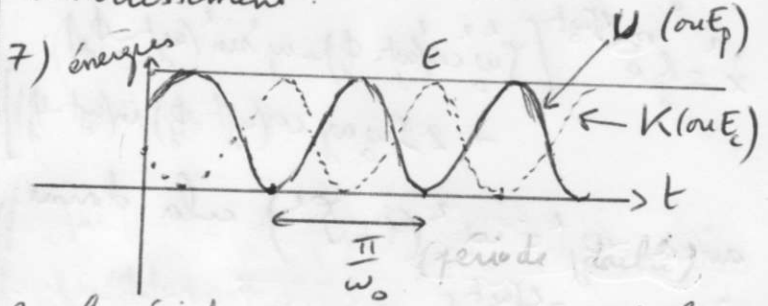
6) $E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$= \frac{1}{2}m\,R_0^2\,\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t - \phi_0) + \frac{1}{2}kR_0^2\cos^2(\omega_0 t - \phi_0)$

$\boxed{E = \frac{kR_0^2}{2}}$ (car $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$)

L'énergie totale de la structure se conserve au cours du temps ce qui est normal puisque libre sans amortissement.

7)



Rq la période des énergies K et U est la moitié de celle de x puisque K et U varient en $\cos^2(\omega_0 t \ldots)$ et que $\cos^2\omega_0 t = \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{2}$

<u>Avec amortissement et sans excitation</u>

8) PFD projeté sur $\vec{e}_x$:

$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$ d'où $\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\boxed{\zeta = \frac{\gamma\,1}{2\sqrt{km}}}$

9) à $t=0$ $\quad x_0 = A_d$

$\dot{x}_0 = -\zeta\omega_0 A_d + B_d\omega_d = -\zeta\omega_0 x_0 + B_d\omega_d$

d'où $B_d = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_d} = \frac{\dot{x}_0}{\omega_d} + \zeta x_0\frac{\omega_0}{\omega_d}$

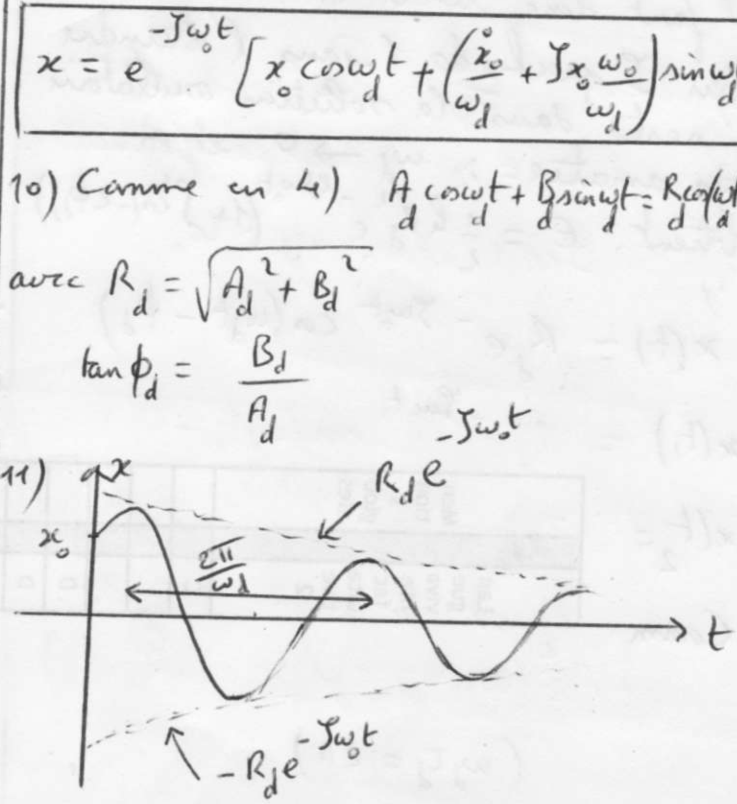
$\boxed{x = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[x_0\cos\omega_d t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_d} + \zeta x_0\frac{\omega_0}{\omega_d}\right)\sin\omega_d t\right]}$

10) Comme en 4) $\quad A_d\cos\omega_d t + B_d\sin\omega_d t = R_d\cos(\omega_d t - \phi_d)$

avec $R_d = \sqrt{A_d^2 + B_d^2}$

$\tan\phi_d = \frac{B_d}{A_d}$

11)



12) $E(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \left(x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2}\right)$

$\dot{x} = R_d e^{-\zeta\omega_0 t}\left[-\zeta\omega_0 \cos(\omega_d t - \phi_d) - \omega_d \sin(\omega_d t - \phi_d)\right]$

$\dot{x}^2 = R_d^2 e^{-2\zeta\omega_0 t}\left[\zeta^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_d t - \phi_d) + \omega_d^2 \sin^2(\omega_d t - \phi_d) + 2\zeta\omega_0\omega_d \cos(\omega_d t - \phi_d)\sin(\omega_d t - \phi_d)\right]$

$\frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2} = R_d^2 e^{-2\zeta\omega_0 t}\left[\zeta^2 \cos^2(\omega_d t - \phi_d) + (1-\zeta^2)\sin^2(\omega_d t - \phi_d) + 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\cos(\omega_d t - \phi_d)\sin(\omega_d t - \phi_d)\right]$

$E(t) = \frac{1}{2} k R_d^2 e^{-2\zeta\omega_0 t}\left[1 + \zeta^2(\cos^2 - \sin^2) + 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\cos \sin\right]$

En trigo : $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$2\cos x \sin x = \sin 2x$

$$\to \boxed{E(t) = \frac{1}{2} k R_d^2 e^{-2\zeta\omega_0 t}\left[1 + \zeta^2 \cos 2(\omega_d t - \phi_d) + 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\sin 2(\omega_d t - \phi_d)\right]}$$

Pour $\zeta = 0$ (pas d'amortissement) on retrouve le résultat du 6)

Pour $\zeta = 1$ on a $\omega_d = 0$ ce qui correspond à la limite du régime critique où la solution $x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}(A't + B')$ il faut donc revoir $E(t)$

13) T.E.M $\frac{dE}{dt} = P_{nc} = P_{\text{frottement}} < 0$

donc $E \searrow$ à cause des frottements.

14) Si $\zeta \ll 1$ alors $\omega_d \simeq \omega_0$

$x(t) \simeq R_d e^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_d t - \phi_d)$

$x_1 = x(t_1) = R_d e^{-\zeta\omega_0 t_1}\cos(\omega_d t_1 - \phi_d)$

$x(t_2 = t_1 + \tau_d) = R_d e^{-\zeta\omega_0(t_1+\tau_d)}\cos(\omega_d(t_1+\tau_d) - \phi_d)$

Comme τ_d est la pseudo-période

$\cos(\omega_d(t_1 + \tau_d) - \phi_d) = \cos(\omega_d t_1 - \phi_d)$

$(\omega_d \tau_d = 2\pi)$

donc $x_2 = x(t_2) = e^{-\zeta\omega_0(t_1+\tau_d)}$

et $\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\zeta\omega_0 t_1}}{e^{-\zeta\omega_0(t_1+\tau_d)}} = e^{\zeta\omega_0\tau_d}$

$\ln\frac{x_1}{x_2} = \zeta\omega_0\tau_d$ avec $\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$

$\ln\frac{x_1}{x_2} = \zeta\frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \simeq 2\pi\zeta$ si $\zeta \ll 1$

$$\boxed{\ln\frac{x_1}{x_2} = 2\pi\zeta \text{ si } \zeta \ll 1}$$ (ok)

15) Lecture
$x_1 = 0{,}014602$ m
$x_2 = 0{,}010661$ m
$t_1 = 4{,}004004$ s
$t_2 = 8{,}008008$ s

$\ln\frac{x_1}{x_2} = 0{,}314 \longrightarrow \underline{\zeta = 5{,}01 \cdot 10^{-2} \ll 1}$

Période : $t_2 - t_1 = 4{,}004004$ s $\simeq 4$ s

soit $\tau_d = 4{,}004004$ s $\simeq T_0$ car $\zeta \ll 1$

$\underline{k} = m\omega_0^2 = m\frac{4\pi^2}{T_0^2} = 110\times10^3\frac{4\pi^2}{4^2} = \underline{2{,}71 \cdot 10^5 \text{ N/m}}$

$\underline{\gamma} = 2\zeta\sqrt{km} = \underline{1{,}73 \cdot 10^4 \text{ kg/s}}$

(unité $F_d = -\gamma\dot{x} \Rightarrow$)

Si $\zeta \nearrow$ le frottement $\nearrow$ et <u>la décroissance de $x(t)$ est plus rapide.</u>

$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \searrow$ donc $\tau_d \nearrow$

<u>la pseudo-période croît.</u>

Amortissement et excitation

16) PFD $m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_0\cos\omega t$

ce qui conduit à $\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$

(ok)

17) En notation complexe $\underline{F} = F_0 e^{j\omega t}$

$\underline{x}_{exc} = X e^{j(\omega t - \phi)}$

$\left(-\omega^2 + 2j\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2\right) X e^{-j\phi} = \frac{F_0}{m}$

Module $\boxed{X = \dfrac{F_0}{m}\dfrac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_0\omega)^2}}}$ (OK)

$$e^{-j\phi} = \frac{\frac{F_0}{mX}}{(\omega_0^2-\omega^2+2j\zeta\omega_0\omega)}$$

$$e^{j\phi} = \text{nb réel positif} \times (\omega_0^2-\omega^2+2j\zeta\omega_0\omega)$$

$\boxed{\tan\phi = \dfrac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}$ (OK)

18) $$\Pi = \frac{X}{F_0/k} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_0\omega)^2}}$$

$$\boxed{\Pi = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}}$$

Π est une fonction de transfert de l'amplitude des oscillations en réponse à une excitation de pulsation ω

19) Π est maximale si le (dénominateur)^2 est minimal

Posons $y = r^2$ et cherchons quand $\sqrt{(1-y)^2+(2\zeta)^2 y}$ est minimal

Dérivée/y : $-2(1-y)+4\zeta^2 = 0$

$$y = 1-2\zeta^2$$

Comme $y = r^2$ $1-2\zeta^2$ doit être >0

Il faut donc que $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$

alors $\boxed{r = \sqrt{1-2\zeta^2}}$ (ou $\omega = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$)

20) On avait en 15 une pseudo-période de 4 s (avec $\zeta \ll 1$)

Si la période excitatrice est de 8 s on n'est pas près à la résonance mais quand-même pas très loin.

(Avec $\zeta \ll 1$, le pic de résonance est pointu, il faut vraiment être à 4 s pour observer une résonance)

la plate-forme reste en place