Sujet

Physique 1

PC **2016**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

L'effet dynamo, origine du champ géomagnétique ?

Les formules et données numériques utiles sont fournies en fin d'énoncé, avant les annexes.

Ce sujet, comportant trois parties largement indépendantes, propose d'étudier les conséquences du mouvement d'un fluide conducteur électrique en présence de champ magnétique. Cette étude porte notamment sur l'effet dynamo, qui est l'hypothèse la plus crédible à ce jour pour expliquer la présence du champ magnétique terrestre. Nous allons dans un premier temps effectuer une mesure du champ magnétique terrestre. Ensuite, nous discuterons des différentes hypothèses historiques expliquant la présence du champ magnétique terrestre, pour aboutir à la théorie de l'effet dynamo, que nous développerons de manière qualitative et quantitative. Une troisième partie permettra enfin d'établir les relations dites fondamentales de la magnétohydrodynamique (en d'autres termes : la dynamique des fluides magnétiques) sous certaines hypothèses simplificatrices et d'en discuter le sens physique.

I Une mesure du champ géomagnétique

Dans cette première partie, nous nous intéressons à la mesure de la composante horizontale du champ magnétique terrestre, de norme B_H, grâce à un dispositif de type « bobines de Helmholtz » qui peut être réalisé facilement avec du matériel courant.

I.A – Une spire de rayon R, d'axe $\vec{u}_x$ et située en $x = 0$ est parcourue par un courant électrique continu d'intensité I. Elle crée en un point M d'abscisse x de son axe un champ magnétique $\vec{B}_{\text{spire}}(x)$ dont l'amplitude s'exprime par

$$B_{\text{spire}}(x) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{-3/2} \tag{I.1}$$

À l'aide d'un schéma, préciser la direction de ce champ magnétique et discuter de son sens. En déduire une expression vectorielle $\vec{B}_{\text{spire}}$ si la spire est orientée positivement par rapport à l'axe de la spire, lui-même orienté par $\vec{u}_x$.

I.B – Déterminer alors le champ magnétique $\vec{B}_{\text{bobines}}(x)$ créé en un point M d'abscisse x de l'axe commun à deux bobines d'épaisseur négligeable, comprenant chacune N spires, parcourues par des courants de même sens et de même intensité et situées respectivement en $x = -e/2$ et $x = +e/2$. Faire un schéma représentant le système.

I.C –

I.C.1) Tracer qualitativement l'amplitude $B_{\text{bobines}}(x)$ du champ $\vec{B}_{\text{bobines}}(x)$ en fonction de x, en faisant apparaitre la contribution de chaque bobine. On distinguera différents cas selon que e est plus grand ou plus petit qu'une valeur critique e_0 (qu'on ne cherchera pas à déterminer). Quel est l'intérêt pratique du cas $e = e_0$?

I.D – On positionne les bobines de façon à ce que e $= R$. En $x = 0$, on place une petite boussole constituée d'une aiguille aimantée susceptible de tourner librement autour d'un axe vertical passant par son milieu. La norme du moment magnétique de cette aiguille est notée M et on note J son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation.

L'axe des bobines est aligné avec les lignes de champ de la composante horizontale du champ magnétique terrestre de telle sorte qu'en $x = 0$, l'amplitude B du champ magnétique total s'écrit $B = B_{\text{bobines}}(x = 0) + B_H$.

Le moment $\vec{\Gamma}$ du couple subit par un dipôle magnétique de moment $\vec{M}$ plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B}_{\text{ext}}$ est donné par $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$. Préciser la position stable de l'aiguille.

I.E – On appelle T_1 la période des petites oscillations de l'aiguille par rapport à sa position d'équilibre. Montrer que T_1 peut s'exprimer en fonction de J, B et M. On justifiera les différentes hypothèses simplificatrices.

I.F – On appelle T_2 la période des petites oscillations de l'aiguille lorsque le sens du courant dans les bobines est inversé par rapport à la question précédente. Exprimer B_H en fonction de T_1/T_2. Préciser l'intérêt de la méthode.

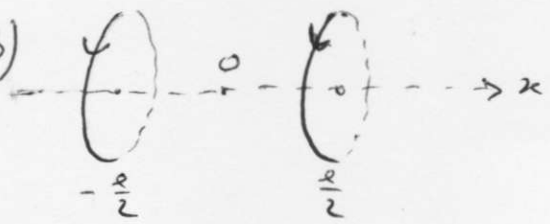
Mines PC16

A)

Tout plan passant par M et l'axe est d'antisymétrie pour I

$\vec{B}_{spire}$ est contenu dans les plans d'antisymétrie. Leur intersection donne l'axe donc $\vec{B}_{spire} \parallel \vec{u}_x$

B)



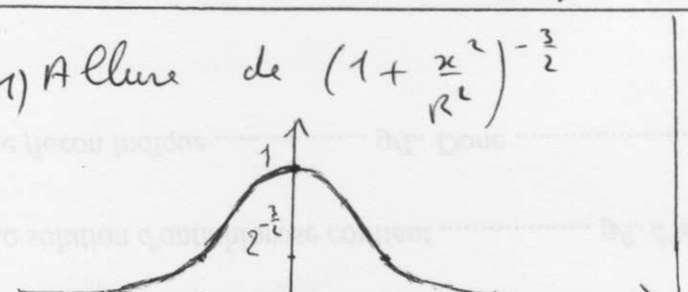
$\vec{B}_{2\,spires} = \vec{B}_{spire(-\frac{e}{2})} + \vec{B}_{spire(\frac{e}{2})}$

prendre l'expression de $\vec{B}_{spire}$ en y mettant $\left(x+\frac{e}{2}\right)$

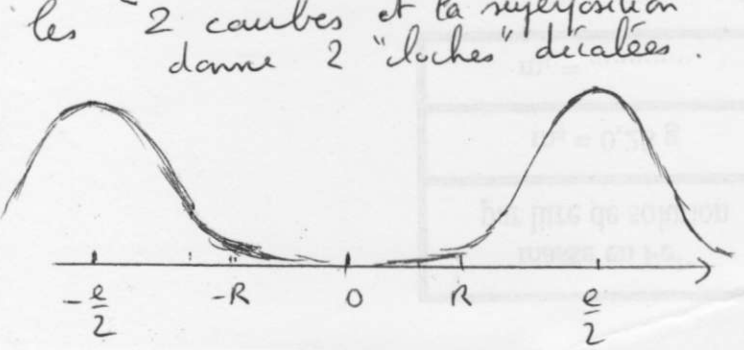
en y mettant $\left(x-\frac{e}{2}\right)$

$$\boxed{\vec{B}_{2\,spires} = \frac{\mu_0 I}{2R}\left[\left(1+\left(\frac{x+\frac{e}{2}}{R}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(1+\left(\frac{x-\frac{e}{2}}{R}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\vec{u}_x}$$

C) 1) Allure de $\left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

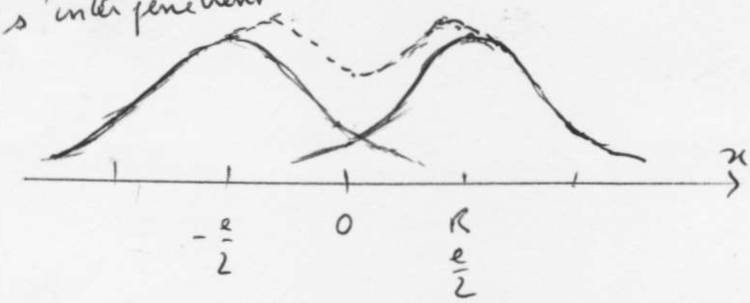


Si $\frac{e}{2} > R$ on décale en conséquence les 2 courbes et la superposition donne 2 "cloches" décalées.

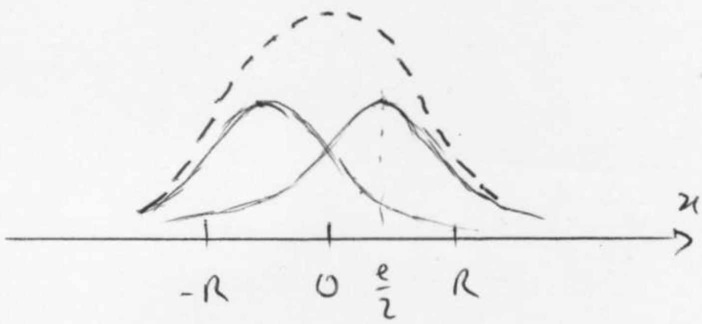


Si $e = 2R$

les 2 cloches s'interpénètrent et donnent la courbe en - - -



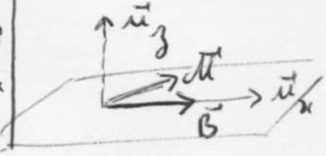
Si $\frac{e}{2} < R$ les 2 cloches se superposent davantage et donnent lieu à un maximum en $x = 0$ (en - - -)



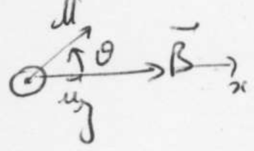
D) $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{ext}$

Position stable pour $\vec{\Gamma} = \vec{0}$ càd $\vec{\mathcal{M}} \parallel \vec{B}_{ext}$ et dans le même sens

E) TMC / axe fixe : $J\dot{\omega} = (\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B})\,\vec{u}_z$



$\dot{\theta} = \omega$



$J\dot{\omega} = -\mathcal{M}B\sin\theta$

Pour θ faible $J\ddot{\theta} \simeq -\mathcal{M}B\theta$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\mathcal{M}B}{J}\theta = 0} \qquad \boxed{T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B}}}$$

F) Sens inversé du courant $\Rightarrow B = -B_{bobines} + B_H$

Ainsi $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}(B_{bob}+B_H)}}$ et $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}(-B_{bob}+B_H)}}$

d'où $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{B_H - B_{bob}}{B_H + B_{bob}} \Longrightarrow \boxed{B_H = B_{bobin\,x=0}\,\frac{1+\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}{1-\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}}$

Pour mesurer B_H, on s'affranchit de la mesure de $\mathcal{M}$ ou J de l'aiguille aimantée.