Approximation acoustique et mise en équation

L'onde sonore est une onde de pression et de vitesse se propageant dans un fluide. Les modifications apportées au fluide au passage de l'onde sont des infiniment petits d'ordre 1:

$$p_1(M,t) \ll p_{repos} \qquad \mu_1 \ll \mu_{repos} \qquad v_1(M,t) \ll c$$

Les équations disponibles sont : la conservation de la masse, l'équation d'Euler et l'évolution isentropique des particules de fluide. On peut les linéariser à l'ordre 1, ce qui permet d'aboutir à deux équations de D'Alembert en p_1 et v_1.

$$\Delta p_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{\Delta}\mathbf{v_1} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{v_1}}{\partial t^2} = 0$$

avec

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_{repos}\chi_s}}$$

Pour un gaz parfait : $c = \sqrt{\gamma \frac{RT_0}{M}}$

Ordre de grandeur : $c_{air} = 340\ m.s{-1}$ à $15°C$ $\qquad c_{eau} = 1400\ m.s{-1}$ $\qquad c_{acier} = 4000\ m.s{-1}$

Solutions

Les solutions de l'équation de D'Alembert sont obtenues par superposition d'OPPH de la forme :

$$p_1(\mathbf{r},t) = Acos(\omega t - \mathbf{k}.\mathbf{r}) \qquad \text{et} \qquad v_1(\mathbf{r},t) = Bcos(\omega t - \mathbf{k}.\mathbf{r})\mathbf{u}$$

avec la relation de dispersion, spécifique à l'équation de D'Alembert :

$$|k| = \frac{\omega}{c}$$

Ces ondes se propagent **sans se déformer**, toutes à la même vitesse **c**.
On définit les impédances acoustiques :

$$Z_+ = p_1/v_1 = +\mu_0 c \quad \text{si} \quad \mathbf{k}.\mathbf{u} > 0$$

$$Z_- = p_1/v_1 = -\mu_0 c \quad \text{si} \quad \mathbf{k}.\mathbf{u} < 0$$

Ondes stationnaires

Par superposition de deux OPPH de vecteurs d'onde opposés, on obtient une onde acoustique stationnaire caractérisée par le fait que :
- les noeuds de surpression sont des ventres de vitesse
- les ventres de vitesse sont des noeuds de surpression

et de la forme :

$$p_1(\mathbf{r},t) = A\,cos(\omega t)cos(\mathbf{k}.\mathbf{r}) \qquad \text{et} \qquad v_1(\mathbf{r},t) = \frac{A}{\mu_{repos}c}sin(\omega t)sin(\mathbf{k}.\mathbf{r})\mathbf{u}$$

Les modes propres dans un tuyau vérifient : noeud de vitesse en extrémité fermée
ventre de vitesse en extrémité ouverte

Ainsi la longueur d'un tuyau est un nombre entier de fuseaux si les deux extrémités sont ouvertes
un nombre (entier $+1/2$) de fuseaux si une extrémité est ouverte et l'autre fermée.
(Un fuseau fait une demi-longueur d'onde).

Aspects énergétiques

La conservation de l'énergie se caractérise par l'équation locale :

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_c + u) + \mathrm{div}\,\mathbf{R} = 0$$

avec $e_c = 1/2\,\mu_0\,v_1^2$, $u = 1/2\,\chi_s\,p_1^2$ qui sont des densités **volumiques** d'énergie cinétique et interne et $\mathbf{R} = p_1\mathbf{v_1}$ qui est le vecteur de Poynting acoustique caractérisant la densité de flux de puissance transportée par l'onde sonore.

Réflexion et transmission

A l'interface entre deux milieux d'impédances différentes apparaissent une onde réfléchie et une onde transmise. Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude s'obtiennent en appliquant :

- la relation de **continuité des débits volumiques** , ou celle des **composantes normales des vitesses à section constante**
- la **relation fondamentale de la dynamique à l'interface**.

On définit également les coefficents de réflexion et de transmission en énergie :

$$R = \frac{|| < \mathbf{R}_r > ||}{|| < \mathbf{R}_i > ||} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{|| < \mathbf{R}_t > S''||}{|| < \mathbf{R}_i > S'||}$$

dont la relation $R + T = 1$ exprime la conservation.