# Etude d'un système : le vélo

On représente un cycliste et son vélo de la manière simplifiée suivante :

- Le cycliste et son vélo forment un système de masse totale M.
- Le vélo est constitué d'un cadre, solide indéformable, sur lequel sont articulés par des liaisons sans frottement les deux roues et le pédalier assimilés à des solides indéformables.
- Chacune des roues avant et arrière a un rayon $R_r$ et un moment d'inertie $J_r$ par rapport à son axe de rotation.
- Le pédalier a un moment d'inertie $J_p$ par rapport à son axe de rotation.
- Le rayon du plateau (roue dentée solidaire du pédalier) est $R_p$. Le rayon du pignon ( roue dentée solidaire de la roue arrière) est $R_g$.
- La longueur du levier de chaque pédale est $R_e$ .
- La chaîne est sans masse. On note T sa tension et on admet que seule sa partie située au-dessus du plateau et du pignon est tendue.

Le vélo est animé d'un mouvement de translation de vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$ et les roues roulent sans glisser sur un axe horizontal Ox.

1) Etablir l'expression de la vitesse angulaire instantanée de rotation $\omega_r$ des roues en fonction de v.

2) Donner la relation entre les deux vitesses angulaires instantanées de rotation du plateau $\omega_p$ et de la roue $\omega_r$.

3) Le cycliste exerce sur la pédale la plus haute une force de norme F, perpendiculaire au levier et dirigée vers l'avant.
   a) Ecrire le théorème du centre d'inertie pour le système entier en projection sur Ox.
   b) Ecrire le théorème du moment cinétique pour le pédalier.
   c) Ecrire le théorème du moment cinétique pour la roue avant.  Que remarque-t-on sur le signe de $T_1$ ?
   d) Ecrire le théorème du moment cinétique pour la roue arrière.
   e) En déduire dv/dt.

1) Le non glissement des roues conduit à : $v = R_r\, \omega_r$ (v et $\omega_r$ choisis positifs)

2) La chaîne est inextensible donc la vitesse est identique en chacun de ses points , ç-à-d la vitesse d'un point de la circonférence du plateau est égale à celle d'un point de la circonférence du pignon arrière : $R_p\omega_p = R_g\omega_r$ (le pignon arrière étant solidaire de la roue, sa vitesse angulaire est celle de la roue).

3- a) Le T.C.I s'écrit : $\sum \vec{f}_{ext} = M\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ avec comme forces extérieures le poids total et les réactions du sol sur chaque roue qui ont une composante normale et une tangentielle. En projection sur l'horizontale on obtient : $M dv/dt = T_1 + T_2$ ($T_1$ et $T_2$ choisies algébriques, $T_1$ sur la roue avant)

3-b) Le T.M.C. dans le référentiel barycentrique s'écrit $\dfrac{d\sigma_G^*}{dt} = \sum M(f_{ext})$ .
Pour le pédalier cela donne $J_p\dot{\omega}_p = FR_e - TR_p$ car la force F a comme bras de levier la longueur du levier de la pédale et tend à augmenter la vitesse angulaire du pédalier, alors que la tension de la chaîne a comme bras de levier le rayon du pédalier et a tendance à retenir la rotation du pédalier.

3-c) Pour la roue avant le TMC dans son référentiel barycentrique donne : $J_r\dot{\omega}_r = -T_1R_r$
En effet il n'y a que la réaction tangentielle du sol qui agit sur la rotation de cette roue et a tendance à la diminuer si $T_1$ est positif. Par contre au démarrage , $\dot{\omega}_r > 0$, et donc $T_1 < 0$ .
3-d) Pour la roue arrière, même chose avec $T_2$ et T puisque la chaîne est solidaire de la roue arrière.

$$J_r\dot{\omega}_r = -T_2R_r + TR_g$$

On a les mêmes vitesses angulaires pour les deux roues.
Si $T_2$ est positif la roue arrière tourne moins vite .
Le rôle de la chaîne est de faire croître la vitesse angulaire de la roue arrière (motrice), c'est donc avec la tension T qui agit avec un bras de levier égal au rayon $R_g$ du pignon arrière relié à la roue arrière .

3-e) L'ensemble de toutes les relations écrites ci-dessus conduit après calculs à :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{R_eR_g}{R_rR_p}\frac{F}{M + 2\dfrac{J_r}{R_r^2} + J_p\left(\dfrac{R_g}{R_pR_r}\right)^2}$$