SECOUSSES EN MÉCANIQUE

Chacune des expériences fait intervenir la notion, peu courante en mécanique newtonienne, de secousse : on nomme ainsi une quantité α égale à la dérivée temporelle d'une accélération a : $\alpha = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$.

Première expérience

Sur le guéridon de la figure 1, recouvert d'une nappe sans ourlet, on place une assiette bien remplie. D'un geste brusque, on tire la nappe. L'assiette reste en place sur le guéridon.
La masse de l'assiette est $M = 400$ g, celle de la nappe est $m = 50$ g. Le guéridon (fig. 2) est modélisé par un disque de centre O et de rayon $R = 25$ cm. Il est recouvert d'une nappe de même dimension et d'épaisseur négligeable. L'assiette circulaire, de rayon $r = 5$ cm, est placée au centre de la nappe. On admet que le support de la force **F** développée par l'expérimentateur pendant qu'il tire sur la nappe passe par O et que cette force s'écrit, en fonction du temps t, $\mathbf{F} = m\alpha t\,\mathbf{i}$, où **i** est un vecteur unitaire constant et α une constante. Le frottement entre la nappe et le guéridon est négligeable. Le coefficient de frottement de glissement entre la nappe et l'assiette est noté f ($f = 0{,}2$). Le repère d'espace $R_g(O,\ \mathbf{i})$ est supposé galiléen. On note **g** l'accélération de la pesanteur ($g = 10\ \mathrm{m/s^2}$).

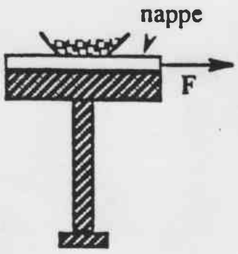


Fig. 1 : assiette, guéridon et nappe

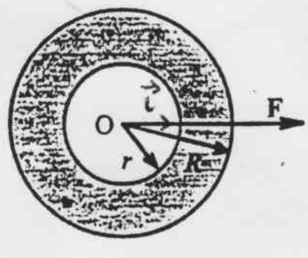


Fig. 2 : nappe et assiette vues de haut

❑ **1** – Montrer que α a bien la dimension d'une secousse.

Une première modélisation

❑ **2** – On suppose que, tout le long de l'expérience, l'assiette glisse sur la nappe. Quel est, à l'instant $t = 0^+$, le signe de la vitesse de glissement de l'assiette par rapport à la nappe ?

❑ **3** – Montrer que l'accélération de l'assiette est constante dans R_g et déterminer l'équation horaire du mouvement de son centre C_a, $x_a = \mathrm{f}(t)$. (Faire un schéma des forces).

❑ **4** – Déterminer l'équation horaire du mouvement du centre C_n de la nappe, $x_n = \mathrm{h}(t)$.
(Faire un schéma des forces).

❑ **5** – On observe que le déplacement de l'assiette est négligeable et que le contact nappe-assiette dure un temps $\tau = 0{,}1$ s ; calculer la valeur de α. La manipulation peut-elle être conduite avec succès par un enfant ?

Une modélisation plus réaliste

En réalité, la dynamique de l'assiette comprend deux phases ; dans la première phase, de durée t_1, l'intensité de la force de frottement est inférieure à la valeur fMg donnée par la loi de COULOMB, *l'assiette ne glisse pas sur la nappe* et $x_a = x_n$. Le contact entre l'assiette et la nappe induit une force tangentielle **T** sur l'assiette et donc **–T** sur la nappe.

❑ **6** – Pour $0 \le t \le t_1$, intégrer l'équation fondamentale de la dynamique appliquée à la nappe puis à l'assiette. Déduire de ces deux relations que la durée de la phase sans glissement est $t_1 = \dfrac{f(M+m)g}{\alpha m}$. Exprimer $x_a(t_1)$, $\left(\dfrac{\mathrm{d}x_a}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_1}$, $x_n(t_1)$ et $\left(\dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_1}$.

❑ **7** – Déterminer, pour $t \ge t_1$, et sous la forme de polynômes de la variable $(t - t_1)$, les équations horaires respectives du mouvement de C_a, $x_a = \varphi(t - t_1)$ et de celui de C_n, $x_n = \eta(t - t_1)$.

❑ **8** – On observe que le contact nappe-assiette dure $t_c - t_1 = 0{,}1$ s. Calculer la valeur de la secousse (on devrait arriver à l'équation $\alpha(t_c - t_1)^3 = 6(R + r)$) ; calculer aussi t_1.

Seconde expérience

Un solide S, de masse m, est accroché au plafond par l'intermédiaire d'un ressort R_1 de masse négligeable et de raideur k. Un second ressort R_2, identique au premier, pend sous le solide (fig. 3). À l'instant $t = 0$ on tire sur le ressort R_2. On constate que si l'on tire *lentement*, l'un des ressorts finit par se briser et que si l'on tire *rapidement*, c'est l'autre ressort qui se brise.

❑ 9 – Prévoir quel est, dans chacun des cas, le ressort qui se brise.

Première modélisation

❑ 10 – La force F appliquée à l'extrémité libre de R_2 s'exprime par $F = m\alpha t$ pour $t > 0$ où α est une constante. La tension T de chaque ressort suit la loi de HOOKE (proportionnalité de la tension à l'allongement), jusqu'à une tension de rupture T_r : $T = kx$ pour $T < T_r$, où x est l'allongement du ressort par rapport à sa longueur à vide. On pose $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et l'on appelle $x_1(t)$ l'allongement de R_1. Les conditions initiales étant $\left(\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 0$ et $x_1(0) = \dfrac{mg}{k}$, déduire du principe fondamental de la dynamique appliqué au solide S que l'allongement $x_1(t)$ est donné par :

$$x_1 = \frac{mg}{k} + \frac{m\alpha}{k}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right) = \frac{mg}{k} + \frac{m\alpha}{k\omega}\left[u - \sin(u)\right] \quad (\text{avec } \omega t = u).$$

Faire un schéma des forces en précisant le système considéré.

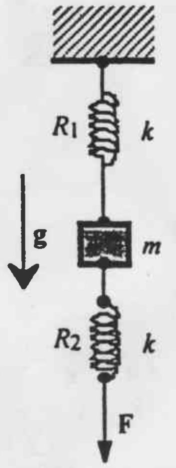


Fig. 3 : deux ressorts

❑ 11 – En déduire l'évolution temporelle des tensions $T_1(u)$ et $T_2(u)$ de chaque ressort.

❑ 12 – Représenter les graphes respectifs de $T_1(u)$ et de $T_2(u)$ et discuter leurs possibilités d'intersections (poser $\varepsilon = \dfrac{g\omega}{\alpha}$).

❑ 13 – On considère le cas où les graphes de $T_1(u)$ et de $T_2(u)$ se coupent. Établir, sous la forme $\mathrm{f}(\varepsilon) = \dfrac{T_r}{mg}$, l'équation donnant la valeur limite de la secousse, α_L, en dessous de laquelle le ressort R_1 se casse le premier.

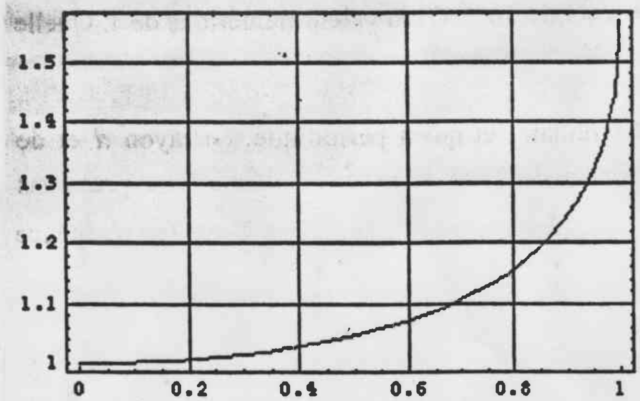


Fig. 3 : graphe de la fonction $\dfrac{\arcsin(x)}{x}$

❑ 14 – *Application numérique* : la tension de rupture est atteinte pour un allongement de 5,8 cm ; $k = 20\ \mathrm{N.m^{-1}}$ et $m = 0{,}1$ kg. Calculer α_L. On pourra, si besoin est, utiliser le graphe de la fig. 3. $(g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}})$

Vers une modélisation plus réaliste

❑ 15 – Peut-être vous est-il apparu avant même cette question que le traitement des questions 13 et 14 était sous-tendu par une hypothèse plutôt discutable sur le comportement global des ressorts. C'est vrai. Dans quel sens un traitement plus réaliste de la situation affecterait-il la valeur numérique de α_L ? Il va de soi que la notion de secousse limite reste pertinente, seule change la manière de la calculer ; on ne demande ici que des arguments qualitatifs et l'on s'attachera surtout à la plausibilité de l'argumentation.

Mines Ponts MP 2001 ①

1ère expérience

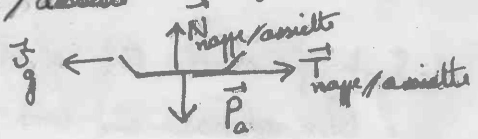
1) $\alpha \sim \dfrac{F}{mt} \sim \dfrac{[M][L][T]^{-2}}{[M][T]} \sim [L][T]^{-3}$

secousse $= \dfrac{da}{dt} \sim \dfrac{[L][T]^{-2}}{[T]} \sim [L][T]^{-3}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\alpha \text{ a bien les dimensions d'une secousse}}$

2) la nappe va vers la droite (sens de F) donc <u>l'assiette glisse vers la gauche / la nappe</u> (sens inverse de F)

3) . Syst = {assiette masse M}   Forces subies : $\vec{P}_{assiette}$ $\vec{N}_{nappe/assiette}$ $\vec{T}$ (frottement nappe sur assiette)



. TCI $\vec{P}_a + \vec{N}_{n/a} + \vec{T}_{n/a} = M\,\vec{a}_a$

. Projⁿ sur verticale ↑ $-Mg + N = 0$

. Proj horiz → $\boxed{T = M a_a}$ (T en module : T > 0 car opposée à $\vec{v}_g$)

. Relation force contact lors gliss^t $\boxed{T = f|N| = fMg}$

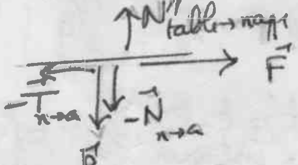
$\Rightarrow fMg = Ma \Rightarrow \boxed{a_a = fg = \text{constante}}$

. Intégrer /t $\Rightarrow v_a = fgt + 0$

. Intégrer /t $\Rightarrow \boxed{x_a = \frac{1}{2} f g t^2}$ (constante d'intégⁿ nulle car $x(0) = 0$)

4) . Syst = {nappe masse m}   Forces subies : $\vec{F}$ $\vec{P}_{nappe}$ $\vec{N}'_{assiette/nappe} = -\vec{N}_{nappe \to assiette}$ et $\vec{N}''_{table \to nappe}$ $\vec{T}'_{a/n} = -\vec{T}_{n/a}$

hyp énoncé (à côté du schéma) "le frott^t entre la nappe et le guéridon est négligeable"



. TCI $\vec{P}_n - \vec{N}_{n/a} + \vec{N}''_{t/n} - \vec{T}_{n/a} + \vec{F} = m\,\vec{a}_n$

Projⁿ vert ↑ non intéressante à cause de $\vec{N}''_{table \to nappe}$

. horiz → $\boxed{-T + F = m a_n}$

rappel du 3) . Relⁿ force contact (cf 3)) $T = fN = fMg$ $\Rightarrow -fMg + F = m a_n$

énoncé F = mαt :: $\boxed{-fMg + m\alpha t = m\ddot{x}_n}$

Intégrer /t $-fMgt + \frac{1}{2} m\alpha t^2 = m\dot{x}_n$ (constante nulle car $\dot{x}_n(0) = 0$)

Int. /t $-\frac{1}{2} fMg t^2 + \frac{1}{6} m\alpha t^3 = m x_n$ ($x_n(0) = 0$)

$\boxed{h \overset{\vee}{=} \; x_n = -\frac{1}{2} f \frac{M}{m} g t^2 + \frac{1}{6} \alpha t^3}$

5) "le contact nappe assiette dure τ = 0,1 s" "l'assiette ne se déplace pas"
donc le contact nappe assiette cesse lorsque le bout de la nappe (situé à −R) est arrivé en h (bord droit de l'assiette)
où quand $x_n = R + r$ Avec 4) $\rightarrow r + R = -\frac{1}{2} f \frac{M}{m} g \tau^2 + \frac{1}{6} \alpha \tau^3$

d'où $\boxed{\alpha = \frac{6}{\tau^3}\left(R + r + \frac{1}{2} f \frac{M}{m} g \tau^2\right)} = \frac{6}{0{,}1^3}\left(0{,}25 + 0{,}05 + \frac{1}{2} \times 0{,}2 \times \frac{400}{50} \times 10 \times 0{,}1^2\right) = \underline{2280 \text{ m s}^{-3}}$

d'où $\underline{F} = m\alpha\tau = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 2280 \cdot 0{,}1 = \underline{11{,}4 \text{ N}}$ ⟶ équivalent à soulever une masse de 1 kg faisable par un enfant

6) . Syst { assiette + nappe } car $\boxed{x_a = x_n}$ soit $\boxed{\ddot{x}_a = \ddot{x}_n}$

$\boxed{⚠ \text{ on n'a plus } T = f\Pi g}$

$$\vec{F} + \vec{P}_a + \vec{P}_n + \vec{R}_{\text{table sur nappe}} = (m+\Pi)\,\vec{a}_a \quad (\text{ou } \vec{a}_n)$$

. Proj horiz $\rightarrow F = (m+\Pi)\,\ddot{x}_a$

. $F = m\alpha t \rightarrow m\alpha t = (m+\Pi)\,\ddot{x}_a \longrightarrow \boxed{\ddot{x}_a = \dfrac{m\alpha t}{m+\Pi} = \ddot{x}_n}$

ou assiette seule $\Pi = \Pi \ddot{x}_a$

nappe seule $F - T = m\ddot{x}_n$

. Intégrer : $\dfrac{1}{2}\alpha t^2 = \dfrac{m+\Pi}{m}\,\dot{x}_n$ (ou $\dot{x}_a$) (constante nulle)

. Intégrer $\dfrac{1}{6}\alpha t^3 = \dfrac{m+\Pi}{m}\,x_n$ (ou x_a) (constante nulle)

.. Syst { assiette Π } cf 3) $T = \Pi \ddot{x}_a$ $\longrightarrow$ $\dfrac{\Pi m \alpha t}{\Pi + m} < f\Pi g$

. Non glissement $\Leftrightarrow T < f\Pi g$

$$\boxed{t_1 = \frac{f(\Pi+m)}{\alpha m}\,g}$$

$$\boxed{x_a(t_1) = \frac{m}{(m+\Pi)}\frac{\alpha}{6}\left(\frac{f(\Pi+m)}{\alpha m}g\right)^3 = \frac{f^3 g^3 (\Pi+m)^2}{6\alpha^2 m^2} = x_n(t_1)}$$

$$\boxed{\dot{x}_a(t_1) = \dot{x}_n(t_1) = \frac{m\alpha}{2(m+\Pi)}\frac{f^2(\Pi+m)^2}{\alpha^2 m^2}g^2 = \frac{f^2 g^2 (\Pi+m)}{2\alpha m}}$$

7) . A partir de $t \geq t_1$ l'assiette glisse ; on a donc les m̂ accélérations qu'en 3) et 4)

càd 3) $\rightarrow \boxed{\ddot{x}_a = fg}$ et 4) $\rightarrow \boxed{\ddot{x}_n = -f\dfrac{\Pi}{m}g + \alpha t}$

. Posons $t' = t - t_1$ $\quad \dot{x}_a(t') = fg\,t' + \dot{x}_a(t_1)$

. intégrer

. intégrer $x_a(t') = \dfrac{1}{2}fg\,t'^2 + \dot{x}_a(t_1)\,t' + x_a(t_1)$

$$\rightarrow \boxed{x_a = \frac{1}{2}fg(t-t_1)^2 + \frac{f^2 g^2(\Pi+m)}{2\alpha m}(t-t_1) + \frac{f^3 g^3(\Pi+m)^2}{6\alpha^2 m^2} = \varphi(t-t_1)}$$

(valeur de $\frac{F}{m}$ au bout de t) $\quad \ddot{x}(t') = -f\dfrac{\Pi}{m}g + \alpha t = -f\dfrac{\Pi}{m}g + \alpha(t'+t_1) = fg + \alpha t'$ en utilisant 6) sur t_1

. intégrer $\dot{x}_n(t') = fg\,t' + \dfrac{\alpha t'^2}{2} + \dot{x}_n(t_1)$

. intégrer $x_n(t') = \dfrac{1}{2}fg\,t'^2 + \dfrac{1}{6}\alpha\,t'^3 + \dot{x}_n(t_1)\,t' + x_n(t_1)$

$$\rightarrow \boxed{g(t-t_1) = x_n = \frac{1}{2}fg(t-t_1)^2 + \frac{1}{6}\alpha(t-t_1)^3 + \frac{f^2 g^2}{2\alpha m}(\Pi+m)(t-t_1) + \frac{f^3 g^3}{6\alpha^2 m^2}(\Pi+m)^2}$$

8) Le contact nappe-assiette cesse lorsque $\boxed{x_n - x_a = r + R}$

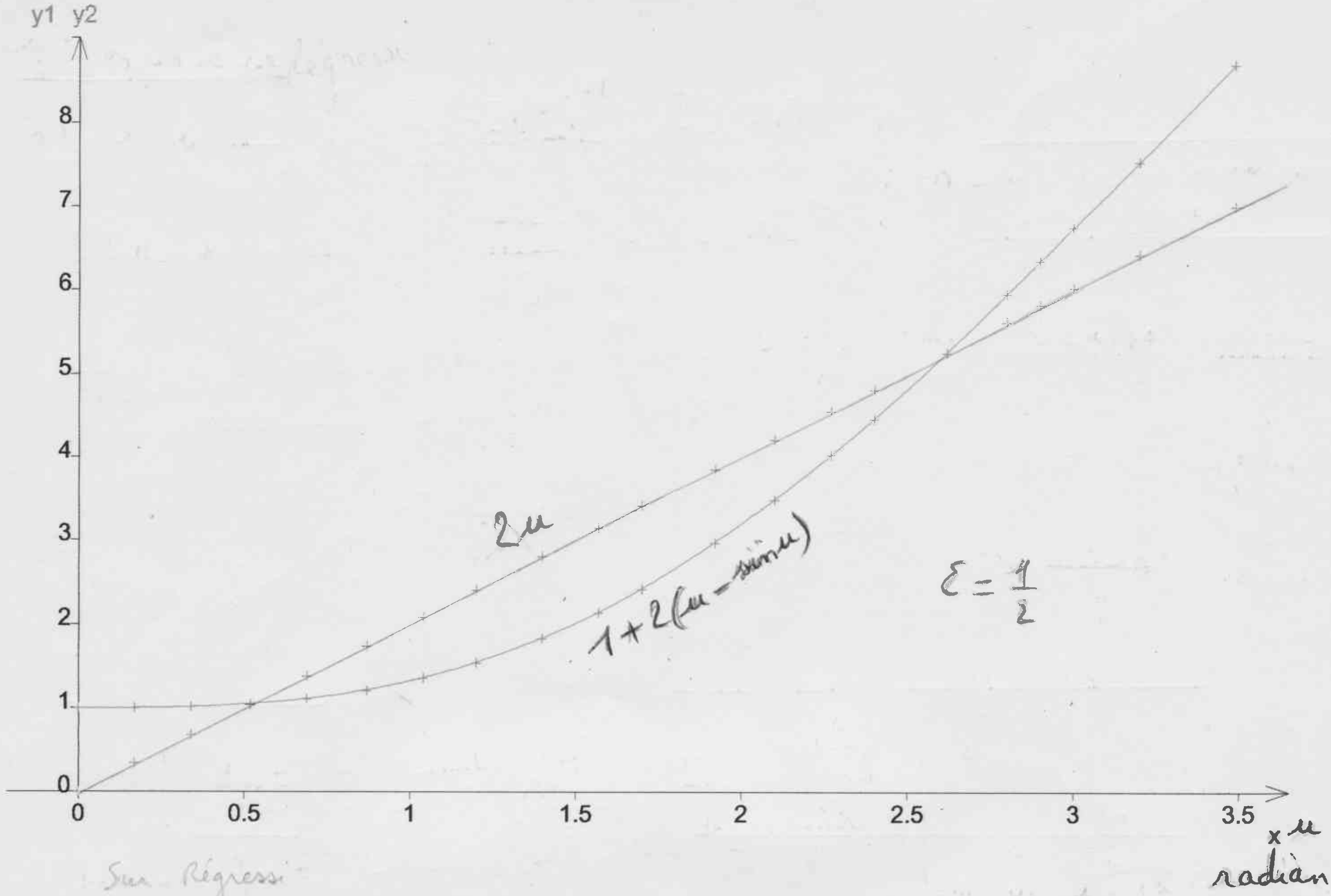
assiette $\dot{x}_a$ r — nappe R $\dot{x}_n$

càd $\dfrac{1}{6}\alpha(t_s - t_1)^3 = r + R$

AN $\alpha = \dfrac{6(r+R)}{(t_s - t_1)^3} = \dfrac{6(5+25)\times 10^{-2}}{0{,}1^3} = \underline{1800\ m\,s^{-3}}$

$t_1 = \dfrac{f(\Pi+m)}{\alpha m}g = \dfrac{0{,}2(400+50)10}{1800\times 50}$

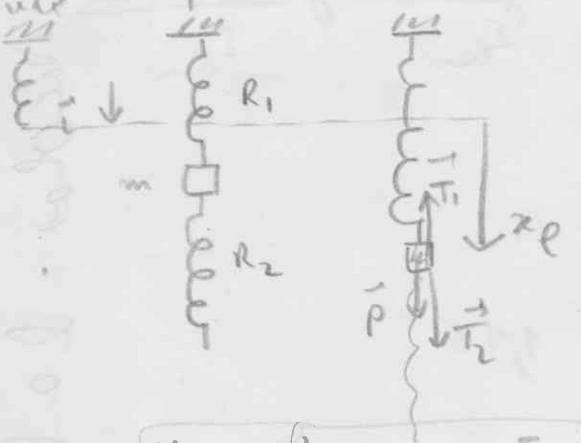
$t_1 \simeq 0{,}01\ s$


y1 y2
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
x u
radian
2u
1+2(u-sinu)
ε = 1/2

Seconde expérience Mines - Ponts MP 2001

9) tirer rapidement : c'est le ressort du dessous R_2 qui se brise d'abord
de lentement : dessus R_1

10) équil mvt



$\vec{T}_1 = -k x_\ell \vec{i}$ Forces sur m : $\vec{P}, \vec{T}_1, \vec{T}_2$

TCI à m $\vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m \ddot{x}_\ell \vec{i}$

TCI à R_2 $-\vec{T}_2 + \vec{F} = \vec{0}$ $\Rightarrow \boxed{\vec{T}_2 = \vec{F}}$

$$\boxed{mg - kx_\ell + F = m\ddot{x}_\ell}$$

$$\boxed{\ddot{x}_\ell + \omega^2 x_\ell = g + \frac{F}{m}}$$
$$= g + \alpha t$$

à lin.

sol $x_{\ell_h} = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$x_{\ell_p} = C + Dt \Rightarrow \ddot{x}_{\ell_p} = 0$

$x_{\ell_p} = \frac{g}{\omega^2} + \frac{\alpha}{\omega^2} t$

$$x_\ell = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{g}{\omega^2} + \frac{\alpha}{\omega^2} t$$

à $t=0$ $x_\ell = \frac{mg}{k} \longrightarrow A + \frac{g}{\omega^2} = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega^2}$ $A = 0$

$\dot{x}_\ell = 0 \longrightarrow B\omega + \frac{\alpha}{\omega^2} = 0 \Longrightarrow B = -\frac{\alpha}{\omega^3}$

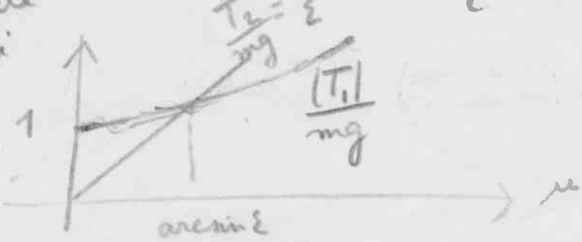
$$\Rightarrow \boxed{x_\ell = -\frac{\alpha}{\omega^3}\sin\omega t + \frac{g}{\omega^2} + \frac{\alpha}{\omega^2} t = \frac{mg}{k} + \frac{m\alpha}{k}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)}$$

11)
$$\boxed{\begin{aligned} |T_1| &= +kx_\ell = +mg + \frac{m\alpha}{\omega}(u - \sin u) \\ T_2 &= F = m\alpha t = \frac{m\alpha}{\omega} u \end{aligned}}$$
$(u = \omega t)$

12) Posons $\boxed{\Sigma = \frac{g\omega}{\alpha}}$: $|T_1| = mg\left(1 + \frac{u - \sin u}{\Sigma}\right)$

$T_2 = mg\frac{u}{\Sigma}$

d'allure
ve Régressi



$|T_1| = T_2 \Longleftrightarrow mg\left(1 - \frac{\sin u}{\Sigma}\right) = 0$

$\Longleftrightarrow \sin u = \Sigma$

Pour arriver à cela, il faut $\Sigma \leq 1$

Soit $\boxed{\alpha \geqslant g\omega}$

13) R_1 se casse le premier si $T_1 > T_2$ (T_1 atteint T_r avant T_2)

$\Longrightarrow \quad 1 > \frac{\sin u}{\varepsilon}$ la valeur limite $\to 1 = \frac{\sin u}{\varepsilon_{lim}}$

$T_1 = T_r$ à un certain moment

soit $T_r = T_1 = mg\left(1 + \frac{u - \sin u}{\varepsilon_{lim}}\right) = \frac{mgu}{\varepsilon_{lim}} = mg\,\frac{\arcsin \varepsilon_{lim}}{\varepsilon_{lim}}$

$$\boxed{f(\varepsilon_{lim}) = \frac{T_r}{mg} = \frac{\arcsin \varepsilon_{lim}}{\varepsilon_{lim}}}$$

14) AN

$T_r = kx_\ell$ $\qquad \frac{\arcsin \varepsilon_\ell}{\varepsilon_\ell} = \frac{T_r}{mg} = \frac{20 \times 5,8 \times 10^{-2}}{0,1 \times 10} = 1,16$

on lit sur le graphe $\varepsilon_{lim} = 0,82$

d'où $\underline{\alpha_\ell} \stackrel{\vee}{=} \frac{g\omega}{\varepsilon_\ell} = \frac{10 \times \sqrt{\frac{20}{0,1}}}{0,82} = \underline{177\ m\,s^{-3}}$

15) on a supposé que la tension suit Hooke jusqu'à cassure