

I1) a) Rayon gaine $\sim 1 \text{ mm}$
 Vitesse de chute $\sim 1 \text{ m s}^{-1}$ (ça dépend de la force de la plaque)

I1) b) $R_e = \frac{\rho_a v r}{\eta_a}$ $\leftarrow$ viscosité dynamique de l'eau

$R_e \sim \frac{1,2 \times 10^{-3}}{1,85 \cdot 10^{-3}} \sim 100 \gg 1$

Le régime est turbulent

I1) c) Forces: Poids, Archimède négligeable car $\rho_a \sim 10^{-3} \rho_e$, et Viscosité

Je suis étonnée qu'on exige la formule de $F_{\text{viscosité}}$ avec ζ_x . Je suis seulement qu'elle est proportionnelle à v^2 et à r^2 et à ρ_a ce qu'on peut écrire $\vec{F}_{\text{viscosité}} = -\alpha \zeta_x r^2 \rho_a v^2 \vec{e}_x$ ou traînée

qui est homogène à une force

Une recherche donne $\vec{F}_{\text{traînée}} = -0,5 \zeta_x \pi r^2 \rho_a v^2 \vec{e}_x$

Poids $\vec{P} = \rho_e \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{e}_x$

Archimède $\vec{\pi} = -\rho_a \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{e}_x$

I1) d) avec $m = \rho_e \frac{4}{3} \pi r^3$, le PFD donne

$m \frac{dv}{dt} = mg - m \frac{\rho_a}{\rho_e} g - 0,5 \zeta_x \pi r^2 \rho_a v^2$

soit $\frac{v}{g} = 1 - \frac{\rho_a}{\rho_e} - \frac{0,5 \zeta_x \pi r^2 \rho_a}{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_e g} v^2$

Comme $\rho_a \sim 10^{-3} \rho_e$ on peut dire $\frac{\rho_a}{\rho_e} \ll 1$

l'oi $\frac{v}{g} \approx 1 - \frac{v^2}{\frac{8 r \rho_e g}{3 \zeta_x \rho_a}} = 1 - \frac{v^2}{u^2}$

avec $u = \sqrt{\frac{8 r \rho_e g}{3 \zeta_x \rho_a}}$

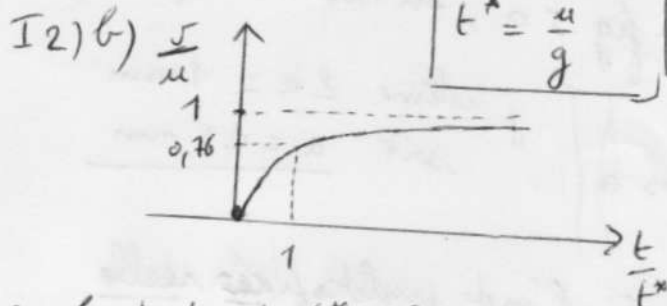
q: quand $\dot{v} = 0$ on a $v = u$
 u est la vitesse limite atteinte

I2) a) Séparer les variables (équation non linéaire)

$\int_0^v \frac{dv}{1 - (\frac{v}{u})^2} = \int_0^t g dt$

$u \operatorname{Arctg}(\frac{v}{u}) = g t$ (cte nulle)

$v = u \operatorname{th}(\frac{g t}{u})$ ou $\frac{v}{u} = \operatorname{th}(\frac{t}{t^*})$
 $t^* = \frac{u}{g}$



Au bout de $t = t^*$, la vitesse a atteint les $\frac{3}{4}$ de sa valeur limite.

I2) c) En prenant tout de suite la valeur limite, on peut construire une distance caractéristique $H^* = u t^*$ qui est largement plus que le chemin parcouru jusqu'à t^*

I2) d) $u = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 998 \cdot 9,81}{3 \cdot 0,4 \cdot 1,20}} = 7 \text{ m s}^{-1}$
 (dépendant du rayon r choisi, ici 10^{-3} m)

$H^* = u t^* = \frac{u^2}{g} \approx 5 \text{ m}$

u : vitesse limite

I3)a)

$$I = \frac{h'}{\Delta t} \text{ par section } \Delta S = 1 \text{ m}^2$$

Les gouttes tombées pendant Δt occupent le volume $\Delta S u \Delta t$

Il y en avait donc $N_0 \Delta S u \Delta t$

Cela donne un volume en eau de $\frac{4\pi r_0^3}{3} \cdot N_0 \Delta S u \Delta t$

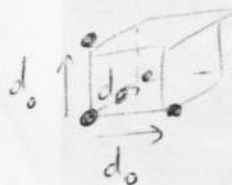
$$D'où \quad h' \Delta S = \frac{4\pi r_0^3}{3} N_0 \Delta S u \Delta t$$

$$\text{Ainsi } \left[I = \frac{h'}{\Delta t} = \frac{4\pi r_0^3}{3} N_0 u \right]$$

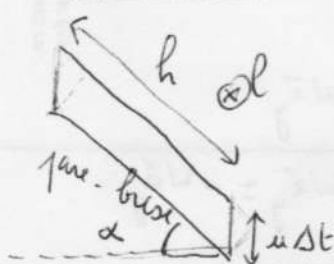
b) AN $N_0 = \frac{3 I}{4 r_0^3 u} = \frac{3}{4} \frac{300 \times 10^{-3}}{3600 \times 0,5^3 \times 10^{-9} \times 7} = 7,10^4 \text{ gouttes/m}^3$
 dépend de la valeur de u prise à 7 m/s

c) $N_0 = \frac{1}{d_0^3}$ car dans un cube de côté d_0 , on peut compter 1 goutte

$$d_0 \approx 2 \text{ cm}$$



I4)a)



I4)b)

$$\Delta \vec{p}_1 = 0 - m u \vec{e}_x \quad m: \text{masse d'1 goutte}$$

Pendant Δt viennent se coller au pare-brise $N_0 h l u \Delta t$ gouttes

$$\text{donc } \Delta \vec{p} = -N_0 h l u \Delta t m u \cos \alpha \vec{e}_x$$

$$d'où \quad \vec{F}_{\text{pare-brise sur gouttes}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = -N_0 h l u^2 m \cos \alpha \vec{e}_x$$

$$d'où \quad \vec{F}_{\text{gouttes sur pare-brise}} = \text{l'opposé} = N_0 h l u^2 m \cos \alpha \vec{e}_x$$

$$\text{La masse d'1 goutte } m = \rho_e \frac{4\pi r_0^3}{3}$$

$$d'où \quad \vec{F}_{\text{gouttes sur pare-brise}} = N_0 h l u^2 \rho_e \frac{4\pi r_0^3}{3} \cos \alpha \vec{e}_x = h \cos \alpha S \rho_e u^2 \vec{e}_x$$

$$d'où \quad k = N_0 \frac{4\pi r_0^3}{3}$$

sans dimension

$$S = h l$$

I4)c) AN $\underline{F_0} = 7,10^4 \times \frac{4\pi}{3} \times 0,5^3 \times 10^{-9} \cos 45^\circ \times 0,5 \times 1 \times 988 \times 7^2 = 0,6 \text{ N}$

dépend de u ici à 7 m/s
 de $N_0 \propto \frac{1}{u}$

donc $F_0 \propto u$

I5) a) $W \sim 10^3 \text{ km/h}$ (un peu moins peut-être)
Vol Paris Nice $\sim 1 \text{ h}$

I5) b) On remarque que $W \gg u$

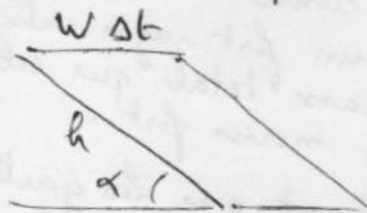
De ref' de l'avion, les gouttes tombent à $\vec{u}'$ (vitesse relative)

De ref' fixe, elles tombent à $u \vec{e}_x$ (vitesse absolue)

$W \vec{e}_y$ est la vitesse d'entraînement

donc $u \vec{e}_x = \vec{u}' + W \vec{e}_y$ soit $\vec{u}' = u \vec{e}_x - W \vec{e}_y \approx -W \vec{e}_y$

Tout se passe, de la ref' de l'avion, comme si les gouttes arrivaient quasi horizontalement (selon $\vec{e}_y$)



I5) c) Variation de quantité de mouvement d'1 goutte: $\Delta \vec{p}_i = \vec{0} - m \vec{u}'$

Nombre de gouttes interceptées pendant Δt : $N_0 W \Delta t h \sin \alpha$

Variation de quantité de mouvement totale: $\Delta \vec{p} = -N_0 W \Delta t h \sin \alpha \rho m \vec{u}'$

Avec $\vec{u}' \approx -W \vec{e}_y$ cela fait approximativement $\Delta \vec{p} = N_0 W^2 \Delta t h \sin \alpha \rho m \vec{e}_y$

PFD: $\frac{\Delta \vec{p}_{gouttes}}{\Delta t} = \vec{F}_{paroi \rightarrow gouttes} = N_0 W^2 h \sin \alpha \rho m \vec{e}_y$

Principe des interactions: $\boxed{\vec{F}_{gouttes \rightarrow paroi} = -\vec{F}_{paroi \rightarrow gouttes} = -N_0 W^2 h \sin \alpha \rho m \vec{e}_y}$

I5) d) $\|\vec{F}_{gouttes \rightarrow paroi}\| = N_0 W^2 h \sin \alpha \rho \frac{4\pi r_0^3}{3}$

$F_{gouttes \rightarrow paroi} = 7 \cdot 10^4 \cdot \frac{10^{6 \times 2}}{(3600)^2} \cdot 0,5 \sin 45^\circ \cdot 1 \cdot 988 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 10^{-9} \approx 10^3 \text{ N}$

(dépend de la valeur de N_0 donc de u)
 $F_{gouttes} \propto u$ ici 7 ms^{-1}

$$I6) a) dN = n_0 e^{-\frac{r}{\lambda}} dr$$

$$N_0 = \int dN = n_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{r}{\lambda}} dr$$

$$N_0 = -\lambda n_0 \left[e^{-\frac{r}{\lambda}} \right]_0^{\infty} = \lambda n_0 \quad \boxed{N_0 = \lambda n_0}$$

$$I6) b) P(r \leq \lambda) = \frac{N(r \leq \lambda)}{N_0} = \frac{n_0 \int_0^{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} dr}{n_0 \lambda}$$

$$P(r \leq \lambda) = 1 - e^{-1} = 0,63$$

$$P(r \geq \lambda) = e^{-1} = 0,37$$

(la somme est égale à 1)

La répartition est la suivante :

environ	$\frac{2}{3}$	de gouttes de rayon $\leq \lambda$	$\geq \lambda$
	$\frac{1}{3}$		

$$I6) c) \langle r \rangle = \int_0^{\infty} r \frac{dN}{N_0} = \int_0^{\infty} \frac{r}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} dr$$

lire notation et données $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1$

donc $\int_0^{\infty} r e^{-\frac{r}{\lambda}} dr = \lambda^2$ (après chang^t de variable)

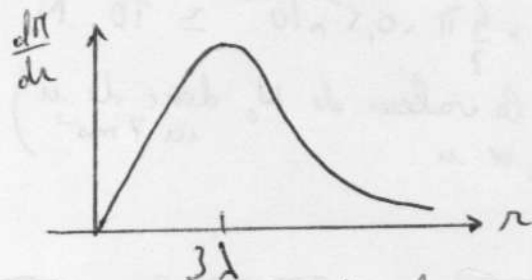
$$d'où \boxed{\langle r \rangle = \lambda}$$

$I7) a)$ $d\pi$ représente la masse des gouttes dont le rayon est entre r et $r+dr$. π occupant l'unité de volume $d\pi \sim$ masse/volume

$$I7) b) \mu(r) = \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 n(r) = \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 e^{-\frac{r}{\lambda}} n_0$$

$$\frac{d(r^3 e^{-\frac{r}{\lambda}})}{dr} = \left(3r^2 - \frac{r^3}{\lambda} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

annulation en $r = 3\lambda$



$I7) c) \boxed{r = 3\lambda}$ pour lequel $\mu(r)$ est max.

$$I7) d) \langle m \rangle = \frac{\int_0^{\infty} d\pi}{N_0} \leftarrow \text{masse de toutes les gouttes (tout rayon) occupant l'unité de volume}$$

$\leftarrow$ nombre de ces gouttes occupant l'unité de volume

$$\int_0^{\infty} r^3 e^{-\frac{r}{\lambda}} dr = 6\lambda^4 \quad (\text{en posant } x = \frac{r}{\lambda})$$

$$\langle m \rangle = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 n_0 e^{-\frac{r}{\lambda}} dr$$

$$= \rho_0 \frac{4}{3} \pi n_0 6\lambda^4 = 8\rho_0 \pi \lambda^3$$

$$\boxed{\langle m \rangle = 8\pi \rho_0 \lambda^3} \quad \text{homogène à une masse}$$

$I7) e)$ La masse d'une goutte de rayon moyen $\langle r \rangle$ serait $\rho_0 \frac{4}{3} \pi \langle r \rangle^3$

$$\text{or } \langle r \rangle = \lambda \quad (I6c)$$

$$d'où \boxed{\text{la masse d'une goutte } \langle r \rangle = \frac{4}{3} \pi \rho_0 \lambda^3}$$

Ce qui est inférieur à la masse moyenne des gouttes. Cela doit provenir du fait que la masse d'une sphère varie comme le cube du rayon. Les gouttes ayant un fort rayon contribuent davantage à la masse totale que celles qui ont un rayon moins fort.

$I8) a)$ Si on admet que les gouttes agissent avec $\vec{F} = -Q N_0 \lambda_0^3 \vec{e}_y$ alors qu'elles ont toutes le m^{ême} rayon λ_0 et qu'il y en a N_0 par unité de volume, alors on peut penser que de façon similaire, la force exercée par les gouttes dont le rayon est entre r et $r+dr$ en nombre dN par unité de volume est $d\vec{F} = -Q dN r^3 \vec{e}_y$

et que la force par toutes les gouttes de tout rayon sera

$$\vec{F}_D = \int_0^{\infty} d\vec{F}$$

$$\text{Calcul: } \vec{F}_D = \int_0^{\infty} -Q n_0 e^{-\frac{r}{\lambda}} dr r^3 \vec{e}_y$$

$$\text{or } \int_0^{\infty} r^3 e^{-\frac{r}{\lambda}} dr = 6\lambda^4 \quad (\text{cf } I7d)$$

$$d'où \vec{F}_D = -Q n_0 6\lambda^4 \vec{e}_y$$

$$\text{Mais } N_0 = \lambda n_0 \quad (\text{cf } I6a)$$

$$\text{donc } \boxed{\vec{F}_D = -Q N_0 6\lambda^3 \vec{e}_y}$$

$$I8) b) \varphi = \left| \frac{\vec{F}_D}{F} \right| = \frac{6\lambda^3}{\lambda_0^3}$$

Si $\langle r \rangle = \lambda_0$ alors $\lambda_0 = \lambda$ (cf I6c)

$\varphi = 6$

I 8c) Prendre en compte la distribution du rayon des gouttes a donné une force 6 fois + grande :

$F_D = 6 \cdot 10^3 \text{ N}$ (cf I 5 d)

La surface du pare-brus $hl = 0,5 \text{ m}^2$ conduit donc à une pression $p = 10^4 \text{ Pa}$
 $(p = \frac{F_D}{S_P})$

L'effet mécanique de la pluie est donc le $\frac{1}{10}$ em de la pression dans l'habitacle.

I 9a) La loi de Marshall-Palmer

$dN = n_0 e^{-\frac{r}{\lambda}} dr$ montre que

$\ln(\frac{dN}{dr}) = \ln n_0 - \frac{r}{\lambda}$ est une droite décroissante. La figure le montre à condition que les gouttes aient un rayon $> 1 \text{ mm}$.

I 9b) Le faible régime correspond à la courbe (e)

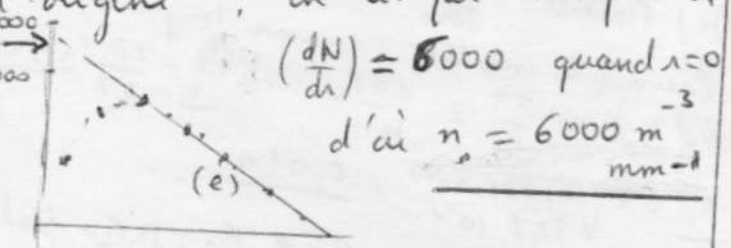
On mesure la pente $\frac{\log 100 - \log(0,001)}{\lambda - 8}$

c'est $\frac{2+3}{-6} = -\frac{5}{6}$

Comme $\log = \frac{\ln}{\ln 10}$, $-\frac{1}{\lambda} = \ln 10 (-\frac{5}{6})$

d'où $\lambda = 0,5 \text{ mm}$

on obtient n_0 par l'ordonnée à l'origine ; on lit par extrapolation



g) $\langle r \rangle = \lambda = 0,5 \text{ mm}$

$N_0 = \lambda n_0 = 0,5 \times 6000 = 300 \text{ m}^{-3}$

avait trouvé en I 3 b) $7 \cdot 10^4 \text{ m}^{-3}$
c'est par la courbe (e) une petite précipitation

I 9 d) Le calcul de la pente repose sur un ensemble de points assez bien alignés, donc, comme il est lié à λ , on doit obtenir une assez bonne valeur de λ donc des rayon moyen $\langle r \rangle$.

L'ordonnée à l'origine avec échelle log est plus aléatoire comme lecture. On peut commettre facilement une erreur d'un facteur presque 5.

Enfin $F \propto N_0 \lambda^3$ dépend surtout de λ . En résumé j'aurais dans l'ordre

$\langle r \rangle$ (= λ)	F	N_0	écart de la loi aux relevés météo

10a) $E_0 = \gamma S = \gamma 2\pi R_0 L$
 ($R_0 \ll L \Rightarrow$ on néglige l'énergie des 2 bases du cylindre)

10b) $E_N = \gamma N 4\pi r^2$

10c) Le chapelet est plus stable si $E_N < E_0$
 soit $2Nr^2 < R_0 L$

Le volume de l'eau étant conservé
 $\pi R_0^2 L = N \frac{4}{3} \pi r^3$ d'où $N = \frac{3 R_0^2 L}{4 r^3}$

La condition du chapelet stable devient:

$\frac{3 R_0^2 L}{4 r^3} < R_0 L$ soit $r > \frac{3}{4} R_0$

Il faut des gouttes assez grosses (il y en aura -)

11a) Écrivons que le volume se conserve

$\pi R_0^2 L = \int_0^L \pi R^2 dx$

$R_0^2 L = \int_0^L (R^2 + 2a(R) \sin kx + a^2 \sin^2 kx) dx$

$R_0^2 L = \langle R^2 \rangle L + 2a \langle R \rangle \left[\frac{-\cos kx}{k} \right]_0^L + a^2 \int_0^L \frac{1 - \cos 2kx}{2} dx$

$R_0^2 L = \langle R^2 \rangle L + \frac{2a \langle R \rangle}{k} (-\cos kL + 1) + a^2 \left(\frac{L}{2} - \left[\frac{\sin 2kx}{4k} \right]_0^L \right)$

$R_0^2 L = \langle R^2 \rangle L + 0 + \frac{a^2 L}{2} - 0$

si $kL \gg 1$
 alors $\lambda \ll L$ donc on a un certain nb de λ sur L

d'où $\langle R^2 \rangle = R_0^2 - \frac{a^2}{2}$

avec $\frac{a}{R_0} \ll 1$: $\langle R \rangle \approx R_0 \left(1 - \frac{a^2}{4 R_0^2} \right)$

11b) Calcul indépendant du résultat précédent; se montrerait à partir de

$dS = 2\pi R(dx')$

$dx' \neq dx$

$dx' = \sqrt{dx^2 + dr^2}$

$\frac{dr}{dx}$

peu d'intérêt dans ce calcul

c) R_0 $S_2(a) < S_2(0)$ si $kR_0 < 1$ c'est $\lambda > 2\pi R_0$

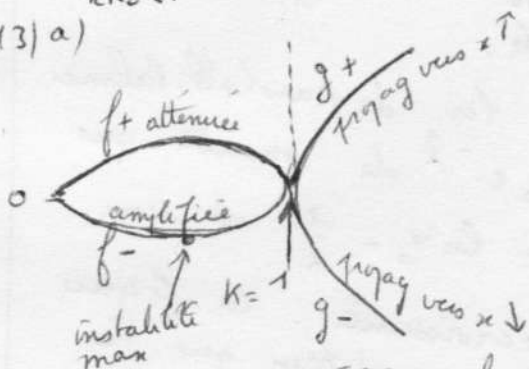
La forme  est plus stable en énergie si $\lambda > 2\pi R_0$

12a) ω réel pour $\omega^2 > 0$ c'est $kR_0 > 1$

(ω réel pour $\lambda < 2\pi R_0$)

12b) si ω réel alors la perturbation se propage telle une onde progressive.
 si ω imaginaire alors la perturbation ne se propage plus; elle peut être atténuée ou amplifiée (selon le signe donné à la racine) dans le temps

13a)



Si on pose $K = kR_0$ alors $\omega^2 = A^2(K^2 - 1)$

$\omega = \pm A \sqrt{K^2 - 1}$ si $K > 1 \Rightarrow$ propagation

$\omega = \pm A \sqrt{1 - K^2}$ si $K < 1 \Rightarrow$ amplifiée (-) atténuée (+)

13b) L'instabilité est la plus grande par l'extrémum de f_-

on lit $K_c = 0,7$

$\tau_c = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{\Omega_0 K_c \sqrt{K_c^2 - 1}} = \frac{1}{\Omega_0 0,7 \sqrt{1 - 0,49}} \approx \frac{2}{\Omega_0}$

$\tau_c = \frac{2}{\Omega_0} = \frac{2 \sqrt{\frac{2 \rho_0 R_0^3}{\gamma}}}{\Omega_0}$

13c) Noter: la tension superficielle qui freine, l'inertie (comme toujours)

13d) $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi R_0}{K} \Rightarrow \frac{\lambda}{c} = \frac{2\pi \cdot 1}{0,7} \approx 1 \text{ cm}$

$\tau_c = 2 \sqrt{\frac{2 \times 988 \times 10^{-3}}{72,8 \times 10^{-3}}} = 0,01 \text{ s}$

13e) $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\Omega_0 g + R_0}{K} = \Omega_0 R_0 \times \text{pente}$

$v_\varphi = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 1,3}{0,4} = 0,65 \text{ ms}^{-1}$

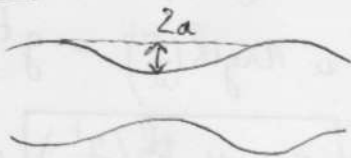
Pour $K^2 \gg 1$ $v_\varphi \approx \frac{\Omega_0 k R_0 \cdot k R_0}{k} = \Omega_0 k R_0^2$

II C14/a) $Q = \rho_e \pi R_0^2 U_0$

d'où $U_0 = \frac{Q}{\rho_e \pi R_0^2}$ $U_0 = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{998 \pi 10^{-6}}$

$U_0 = 0,6 \text{ ms}^{-1}$

14/b) d'après fig 3



et la fig 5 a, en sortie du filet d'eau

$2a \rightarrow$ j'estime $2a = 1 \text{ mm}$
soit $a = 0,5 \text{ mm}$

15/a) Si onde, alors réelle

15/b) Apparence figée / labo c'est que
 $v_\varphi = -U_0$ (comme un voyageur
qui remonte le sens du tapis roulant)

15/c) Je crois observer 5 petits points
blancs (correspondant à des creux)
sur 5 mm

$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \updownarrow 5 \text{ mm}$ d'où $\lambda \approx 1 \text{ mm}$
(ça me paraît
surestimé
qd-m)

d'où $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}$

et $kR_0 = \frac{2\pi R_0}{\lambda} = 2\pi \approx 6$

15/d) $v_\varphi = \Omega_0 k R_0^2$ d'après 13)e)

$v_\varphi = \sqrt{\frac{8}{2\rho_e R_0^3}} k R_0 \cdot R_0 = \sqrt{\frac{748 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 998 \cdot 10^{-9}}} 6 \cdot 10^{-3}$

$v_\varphi = 1 \text{ ms}^{-1}$ comparable à U_0

15/e) Hyp. faites jusqu' alors:

$R_0 \ll L$: peut-être limité en fig 5c)

non visqueux : à moins que la viscosité
change en fonction de
la hauteur du jet, on
ne voit pas le rôle que
ça jouerait sur λ

$K^2 \gg 1$ soit $kR_0 \gg 1$ soit $\lambda \ll R_0$ (7)

la hauteur du filet d'eau n'a pas
changé son rayon. donc cette
hyp. n'expliquerait pas.

autres hyp?

15/f) Si atténuation, alors prendre
en compte la viscosité.