Mines-Ponts PC 16

1) $T(z=0;t) = \theta_0 + T_0 \cos\omega t$ conduit à une moyenne temporelle θ_0 en $z=0$

$\theta_0 = 30°C$ d'après lecture énoncé

$T°$ max : $T_{max} = \theta_0 + T_0$

$T°$ min : $T_{min} = \theta_0 - T_0$

Entre hiver et été, on peut proposer une variation globale de t° de roche de 20°C d'où $T_0 = 10°C$

2) $\boxed{\vec{j}_Q \doteq \dfrac{\delta Q}{dS\,dt}\,\vec{e}_z}$ en $W.m^{-2}$

3) Loi Fourier : $\boxed{\vec{j}_Q = -K\,\overrightarrow{grad}\,T}$

Conditions : échelles spatiale et temporelles suffisantes ($> 1\mu m$ et $> 1 ns$)

Dimension de K : $\dfrac{[j_Q][L]}{[T]} \sim W.m^{-1}.K^{-1}$

4) $\boxed{\delta Q_{reçu\,[z,z+dz]} = \left(j_Q(z) - j_Q(z+dz)\right) dS\,dt}$

5) Mésoscopique est entre le domaine du microscopique où on ne peut pas définir une température (pas assez d'atomes) et le domaine du macroscopique où la t° varie et ne serait pas uniforme.

Mésoscopique $\sim 1\mu m^3$ permet de définir une t° uniforme.

6) Bilan thermique du 1er principe en négligeant le travail des forces de pression, ou en considérant que le volume ne varie pas : $dU = \delta Q$

soit $\rho_s\, dS\,dz\, c_s\, dT = \left(j_Q(z) - j_Q(z+dz)\right) dS\,dt$

Ainsi $\boxed{\rho_s c_s \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial z}}$

Avec loi de Fourier $\boxed{\rho_s c_s \dfrac{\partial T}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$

7) Ainsi $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{K}{\rho_s c_s}\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

avec $\boxed{D = \dfrac{K}{\rho_s c_s}}$

8) Il s'agit d'une onde progressive

$\underline{k}$ possède une partie imaginaire

Injectée ds l'éq de la chaleur :

$\boxed{i\omega = -D\underline{k}^2}$

$\underline{k} = (-i)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{\omega}{D}} = \pm\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{\omega}{D}} = k' + i k''$

L'énoncé impose $k' \geq 0$ donc $\boxed{\underline{k} = (1-i)\sqrt{\dfrac{\omega}{2D}}}$

k' est lié à la propagation de l'onde

vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'}$

k'' est lié à l'atténuation de l'onde en $e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}$

$\underline{T} = \theta_0 + T_0\, e^{i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}z\right)}\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}$

$\boxed{T = \theta_0 + T_0\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} \cos\left(\omega t - \sqrt{\dfrac{\omega}{2D}}z\right)}$

9) On souhaite des oscillations annuelles ne s'écartant pas de θ_0 de plus de 1‰, càd une amplitude

$T_0\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} < \dfrac{\theta_0}{100}$

soit $-\sqrt{\dfrac{\omega}{2D}}\,z < \ln\dfrac{\theta_0}{100T_0}$ ou $\boxed{z > \sqrt{\dfrac{2D}{\omega}}\ln\dfrac{\theta_0}{100T_0}}$

AN avec le choix de $T_0 = 10°C$

$z \geq \sqrt{\dfrac{2.3 \quad 365\times24\times3600}{2{,}65\times10^3 \times 8{,}5\cdot10^3 \times 2\pi}}\ \ln\dfrac{30}{1000}$

rq : $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{\text{Durée de 1 an}}$

$z > 4{,}06$ m (valeur plausible).

10) Les variations quotidiennes ont une fréquence plus élevée. Or z décroît avec la fréquence. Donc les effets de variation de t° se font sentir moins loin (moins profondément)

Le sol se comporte donc comme un passe bas puisqu'il fait moins bien pénétrer les hautes fréquences.

11) Pour la couche $[z\,;\,z+dz]$ en régime stationnaire : $0 = \delta Q$

Pour δQ il y a la chaleur entrant en z, la chaleur sortant en $z+dz$ et la chaleur produite par réactions radioactives.

Ainsi $0 = \left(j_Q(z) - j_Q(z+dz)\right) dS\,dt + P\,dS\,dz\,dt$

soit $\boxed{0 = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} + P_0 e^{-\frac{z}{H}}}$

12) Loi de Fourier $j_Q = -k\frac{\partial T}{\partial z}$

$\rightarrow 0 = k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + P_0 e^{-\frac{z}{H}}$

Intégrer : $\frac{\partial T}{\partial z} = + \frac{P_0 H e^{-\frac{z}{H}}}{k} + cte_1$

Sachant que le flux surfacique en L_c est égal à $-j_m \vec{e}_z$ et que ce flux surfacique $-j_m = -k\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{L_c}$

cela donne $\frac{j_m}{k} = \frac{P_0 H e^{-\frac{L}{H}}}{k} + cte_1$

soit $cte_1 = \frac{1}{k}\left(j_m - P_0 H e^{-\frac{L}{H}}\right)$

d'où $\boxed{\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{P_0 H}{k}\left(e^{-\frac{z}{H}} - e^{-\frac{L}{H}}\right) + \frac{j_m}{k}}$

Intégrer : $T = \frac{P_0 H}{k}\left(-He^{-\frac{z}{H}} - e^{-\frac{L}{H}} z\right) + \frac{j_m}{k} z + cte_2$

Sachant qu'en $z = 0$ on a θ_0 :

$\theta_0 = -\frac{P_0 H^2}{k} + cte_2$ d'où $cte_2 = \theta_0 + \frac{P_0 H^2}{k}$

Ainsi $\boxed{T = \frac{P_0 H}{k}\left(-He^{-\frac{z}{H}} - e^{-\frac{L}{H}} z\right) + \frac{j_m z}{k} + \frac{P_0 H^2}{k} + \theta_0}$

13) On en déduit le flux thermique surfacique en $z = 0$:

$\boxed{\vec{j_s} = -k\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_0 \vec{e}_z = \left(-P_0 H\left(1 - e^{-\frac{L}{H}}\right) - j_m\right)\vec{e}_z}$

14) Les 2 termes proportionnels à z dans $T(z)$ sont :

$P_0 H e^{-\frac{L}{H}}$ et $j_m z$

Leur rapport donne : $\frac{P_0 H e^{-\frac{L}{H}}}{j_m}$

AN : $\frac{P_0 H e^{-\frac{L}{H}}}{j_m} = \frac{2,5\times10^{-6}\times10\times10^{3}\, e^{-\frac{45}{10}}}{35\times10^{-3}} = 0,008$

donc j_m l'emporte sur $P_0 H e^{-\frac{L}{H}}$:

Ainsi $\boxed{T \simeq + \frac{P_0 H^2}{k}\left(1 - e^{-\frac{z}{H}}\right) + \frac{j_m z}{k} + \theta_0}$

$T_{(z=1,70)}$ en °C car $\theta_0 = 0$°C $= \frac{2,5.10^{-6}\times10^2\times10^6}{3}\left(1 - e^{-\frac{1,7}{10}}\right) + \frac{35\times10^{-3}\times1,70\times10^3}{3}$

$T_{(z=1,70)} = 32,8$ °C

$j_s = -P_0 H\left(1 - e^{-\frac{L}{H}}\right) - j_m = -2,5\times10^{-6}\times10\times10^{3}\times\left(1 - e^{-\frac{4,5}{10}}\right) - 35\,10^{-3}$

$j_s = -60$ mWm^{-2}

15) Eq^n de diffusion sans apport extérieur d'énergie thermique en régime stationnaire : $\boxed{\Delta T = 0}$

Séparation des variables : $\boxed{T = f(x) g(z) + \theta_1}$

$\Rightarrow f''(x) g(z) + f(x) g''(z) = 0$

soit $\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(z)}{g(z)}$

f^n de x ; f^n de z

x et z indépendants donc $\frac{f''(x)}{f(x)} = -Cte = +\frac{g''(z)}{g(z)}$

$\begin{cases} g''(z) - cte\, g(z) = 0 \\ f''(x) + cte\, f(x) = 0 \end{cases}$

Si on souhaite une C.L en cosinus pour la variable x, il faut $cte > 0$

Alors $f(x) = A\cos\sqrt{cte}\,x + B\sin\sqrt{cte}\,x$

Avec $T(x, z=0) = f(x) g(0) + \theta_1 = T_s + T_1\cos\frac{2\pi}{\lambda}x$

soit $\left(A\cos\sqrt{cte}\,x + B\sin\sqrt{cte}\,x\right) g(0) + \theta_1 = T_s + T_1\cos\frac{2\pi}{\lambda}x \quad \forall x$

d'où $B = 0$ $\boxed{\sqrt{cte} = \frac{2\pi}{\lambda}}$ et $g(0)A = T_1$ $\boxed{\theta_1 = T_s}$

d'où $\boxed{f(x) = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x}$

Il reste donc $g''(z) - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 g(z) = 0$

d'où $\boxed{g(z) = A' e^{-\frac{2\pi z}{\lambda}}}$ (on élimine le ... $+\infty$)

Ainsi $g(0)\,A = T_1$ donne $A'A = T_1$

$$\boxed{T = AA' \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \, e^{-\frac{2\pi z}{\lambda}} + T_s = T_1 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} e^{-\frac{2\pi z}{\lambda}} + T_s}$$

Si on regarde le relief donné fig 1, on constat que 'il suit vaguement une sinusoïde de période 10 km, d'où la variation $T(x)$ donnée dans l'énoncé.