Nous considérons un tube élastique de longueur infinie que l'on repère par un axe (Ox) représenté sur la **figure 6** et nous supposerons le problème à une dimension x. À l'intérieur du tube, en un point d'abscisse x et à un instant t donnés, un fluide de masse volumique $\rho(x,t)=\rho_0+\tilde{\rho}(x,t)$ circule à la vitesse $v(x,t)$ sous une pression $P(x,t)=P_0+\tilde{P}(x,t)$. Les grandeurs ρ_0 et P_0 correspondent respectivement à la masse volumique et à la pression du fluide dans son état de repos. Les grandeurs $\tilde{\rho}(x,t)$ et $\tilde{P}(x,t)$ correspondent respectivement aux variations de la masse volumique et de la pression du fluide par rapport à son état au repos. Nous supposerons que $\rho_0 >> \tilde{\rho}(x,t)$ et que $P_0 >> \tilde{P}(x,t)$; $\tilde{\rho}(x,t)$, $\tilde{P}(x,t)$ et $v(x,t)$ sont des infiniment petits du premier ordre. Par ailleurs, les effets de la pesanteur sont négligeables. Enfin, nous considérerons ici que le sang se comporte comme un fluide parfait sans viscosité.

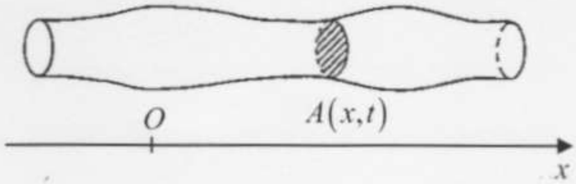

Figure 6 – Modélisation de l'artère

Pour décrire l'élasticité du vaisseau, nous avons besoin de nous intéresser à la surface de sa section $A(x,t)$ et à sa distensibilité D. Sa section se décompose en : $A(x,t)=A_0+\tilde{A}(x,t)$ où A_0 correspond à la surface de la section du vaisseau au repos et $\tilde{A}(x,t)$ est un infiniment petit du premier ordre. La distensibilité a pour expression $D=\frac{1}{A}\cdot\left(\frac{\partial A}{\partial P}\right)_S$ où $\left(\frac{\partial A}{\partial P}\right)_S$ désigne la dérivée de la surface A en fonction de la pression P à entropie S constante. En l'absence de viscosité, l'entropie est maintenue constante et $D\approx\frac{1}{A_0}\cdot\frac{\tilde{A}}{\tilde{P}}$. Enfin, le sang sera considéré ici comme légèrement compressible, de compressibilité isentropique $\chi_s=\frac{1}{\rho}\cdot\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S$, qui est ici assimilable à $\chi_s\approx\frac{1}{\rho_0}\cdot\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{P}}$.

Q18. Donner l'expression de l'équation d'Euler en tenant compte des termes d'ordre le plus bas.

Q19. Établir le bilan de masse entre les instants t et $t+dt$ dans le volume $A(x,t)\cdot dx$ délimité par le vaisseau entre les sections situées aux abscisses x et $x+dx$.

Q20. Cette équation conduit, après avoir retenu les termes d'ordre le plus bas, à la relation :

$$\rho_0\cdot A_0\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\rho_0\cdot\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t}+A_0\cdot\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}=0.$$

En déduire qu'elle correspond à la relation : $(D+\chi_s)\cdot\frac{\partial\tilde{P}}{\partial t}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

Q21. À partir des résultats précédents, montrer que $\tilde{P}$ obéit à une équation d'onde de type d'Alembert. Préciser cette équation. En déduire l'expression de la vitesse de propagation c de l'onde de pression en fonction de ρ_0, D et χ_s. Donner la forme de la solution de cette équation. Quelle est la dénomination usuelle de ce type d'onde ? Vérifier que si le sang est considéré comme un fluide incompressible, alors $c=\frac{1}{\sqrt{\rho_0\cdot D}}$. Dans ce cas, c est de l'ordre du mètre par seconde, commenter cette valeur.

18) Euler $\rho\left(\frac{\partial \vec v}{\partial t} + (\vec v \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\,\vec v\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p$

$\frac{\partial \vec v}{\partial t}$: ordre 1 ; $(\vec v \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\,\vec v$: ordre 2

pesanteur négligée (c'est écrit dans l'énoncé)

on néglige l'ordre 2 / ordre 1 $\longrightarrow$ $\boxed{\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde p}{\partial x}}$

19) Bilan de masse : $\delta m_e - \delta m_s = dm$

$dt\left[(\rho A v)_x - (\rho A v)_{x+dx}\right] = \frac{\partial(\rho A\,dx)}{\partial t}\,dt$

$-\frac{\partial(\rho A v)}{\partial x}\,dx\,dt = \frac{\partial(\rho A\,dx)}{\partial t}\,dt$

20) $-\frac{\partial}{\partial x}\left[(\rho_0+\tilde\rho)(A_0+\tilde A)v\right]\,dx\,dt = dx\,\frac{\partial\left[(\rho_0+\tilde\rho)(A_0+\tilde A)\right]}{\partial t}\,dt$

$-\rho_0 A_0 \frac{\partial v}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial \tilde A}{\partial t} + A_0 \frac{\partial \tilde\rho}{\partial t}$ uniq^t termes d'ordre 1

$\rightarrow$ $\boxed{\rho_0 A_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial \tilde A}{\partial t} + A_0 \frac{\partial \tilde\rho}{\partial t} = 0}$ (OK)

Diviser par $\rho_0 A_0$: $-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{A_0}\frac{\partial \tilde A}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tilde\rho}{\partial t}$

or $D \doteq \frac{1}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{A_0}\left(\frac{\partial \tilde A}{\partial \tilde p}\right)_s$ donc $\frac{1}{A_0}\frac{\partial \tilde A}{\partial t} = D\frac{\partial \tilde p}{\partial t}$

$\chi_s = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \tilde\rho}{\partial \tilde p}\right)_s$ donc $\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tilde\rho}{\partial t} = \chi_s \frac{\partial \tilde p}{\partial t}$

d'où $\boxed{-\frac{\partial v}{\partial x} = (D+\chi_s)\frac{\partial \tilde p}{\partial t}}$ (OK)

21) Combiner $\frac{\partial}{\partial x}(18)$ et $\frac{\partial}{\partial t}(19)$

$$\left.\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t} &= -\frac{\partial^2 \tilde p}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x} &= (D+\chi_s)\frac{\partial^2 \tilde p}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \tilde p}{\partial x^2} - (D+\chi_s)\rho_0 \frac{\partial^2 \tilde p}{\partial t^2} = 0}$$

D'Alembert $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{(D+\chi_s)\rho_0}}}$

Solution $\tilde p = f(x-ct) + g(x+ct)$

Fourier $\tilde p = \Sigma\, p_0 \cos(\omega t \mp kx + \varphi)$

Incompressibilité $\Rightarrow \chi_s = 0 \rightarrow c_{\text{incomp}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 D}}$

AN $c_{\text{incomp}} = \frac{1}{\sqrt{10^3 \cdot D}} = \underset{\text{énoncé}}{1\ \text{m/s}}$ valeur effectivement connue du sang

$\Downarrow$

$\left(D = 10^{-3}\ \text{Pa}^{-1}\right)$