

I. On considère un câble coaxial de longueur infinie, constitué d'un conducteur central de rayon a_1 et de résistivité ρ . Un isolant imparfait de faible conductivité σ , ayant les propriétés électrostatiques du vide (permittivité ϵ_0) le sépare d'un conducteur de rayon $a_2 > a_1$, de résistance négligeable et donc équipotentiel dans toutes les situations envisagées.

- 1) Exprimer pour l'unité de longueur :
 - la résistance r du conducteur central
 - la capacité C du câble coaxial
 - la conductance de fuite g de l'isolant.
- 2) Application numérique : calculer r , C et g pour

$a_1 = 2 \text{ mm}$	$a_2 = 5,4 \text{ mm}$
$\rho = 2 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$	$\sigma = 10^{-6} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ S.I.}$	

II. Etude du câble coaxial relié à un générateur de tension continue

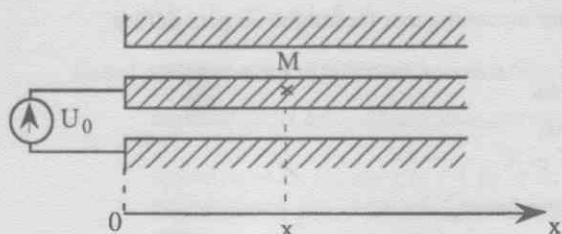


fig. 1

En un point M d'abscisse x (fig. 1) on note :

- $U(x)$ la d.d.p. entre les armatures
- $i(x)$ l'intensité dans le conducteur central

- 1) Par application des lois générales de l'électrocinétique montrer qu'en régime permanent il est possible d'écrire au voisinage de M

$$\begin{aligned} \frac{di}{dx} &= -U(x) g \\ \frac{dU}{dx} &= -r i(x) \end{aligned}$$

- 2) En déduire que $U(x)$ est de la forme

$$U(x) = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x}$$

Exprimer α en fonction de r et g . Calculer numériquement α pour le câble proposé au § I.

- 3) Le câble de longueur ℓ est fermé sur une résistance R_u . Dans ces conditions déterminer A et B en fonction de U_0 , ℓ , r , g , R_u et en déduire la résistance d'entrée R_e du câble.
- 4) Montrer qu'il existe une résistance de charge R'_u pour laquelle R_e est indépendante de la longueur du câble.
Exprimer R'_u en fonction de r et g ainsi que la résistance d'entrée R'_e correspondante.
Comparer R'_e et la résistance d'entrée $R'_{e\infty}$ d'un câble de longueur infinie en circuit ouvert.
Commenter le résultat obtenu.

III. Etude d'un conducteur thermique relié à un thermostat.

Soit une tige cylindrique de rayon a en contact avec un milieu ambiant à température constante T_a .

En tout point M d'abscisse x de la tige on note :

- * $\phi(x)$ le flux de chaleur traversant la section droite de la tige pendant l'unité de temps.
- * $T(x)$ la température supposée uniforme dans toute cette section.
- * $\theta(x) = T(x) - T_a$ la différence de température entre cette section et le milieu ambiant.

- 1) Rappeler la loi de Fourier relative à la conduction thermique et montrer qu'elle permet d'écrire :

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\phi(x)}{\pi a^2 k}$$

Que représente la constante k ? En quelle unité l'exprime-t-on ?

- 2) Etablir le bilan énergétique relatif à l'élément de tige de longueur dx et en déduire la relation

$$\frac{d\phi}{dx} = -k' 2\pi a \theta(x)$$

Que représente k' et en quelle unité l'exprime-t-on ?

Pour la suite on posera $\pi a^2 k = K$ $2\pi a k' = K'$

- 3) En déduire les équations différentielles en $\theta(x)$ et $\phi(x)$ et les intégrer, la longueur de la tige étant infinie, la température à l'entrée étant $T_0 > T_a$.

Déterminer le flux d'entrée ϕ_0 .

4) en comparant II₁ et III_{1.2}, montrer que pour un conducteur thermique on peut définir :

- une résistance thermique r_{th}
- une conductance thermique de fuite g_{th}
- une résistance thermique d'entrée R_{eth}

Exprimer ces grandeurs en fonction de K et K' .

IV. Etude des 2 systèmes en régime sinusoïdal permanent.

On utilisera systématiquement la notation complexe, l'amplitude complexe associée à une grandeur X sera notée $\underline{X}$.

1) Etude électrique $U(0, t) = U_0 \cos \omega t$

a) Montrer qu'en tenant compte de la capacité existant entre les armatures les équations du § II.1 s'écrivent

$$\frac{di}{dx} = - \underline{U} \underline{G}$$

$$\frac{d\underline{U}}{dx} = - r i$$

Exprimer l'admittance de fuite $\underline{G}$ par unité de longueur en fonction de g , C et ω .

b) Vérifier que

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_0 e^{-(\lambda + j\mu)x}$$

est solution, déterminer λ et μ en fonction de r , g , C , ω .

Interpréter le résultat.

NB : $j^2 = -1$

2) Etude thermique $T(0, t) = T_0 + T_1 \cos \omega t$

Outre les fuites latérales la perte de flux dans la tranche d'épaisseur dx dont la température

varie de $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$ par unité de temps est :

$$d\phi = - \mathcal{C} \frac{\partial \theta}{\partial t} dx$$

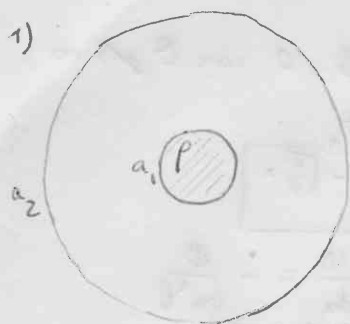
$\mathcal{C}$ étant un coefficient que l'on interprétera.

a) Que deviennent dans ces conditions les équations du § III.1.2 en régime permanent sinusoïdal de pulsation ω ?

b) Montrer que $\underline{\theta}(x) = \underline{\theta}_0 e^{-(\lambda' + j\mu')x}$ est solution.

Exprimer λ' et μ' en fonction de K , K' , $\mathcal{C}$, ω . En déduire l'impédance complexe thermique d'entrée en fonction de λ' , μ' , K .

I 1)

Fil : résistance $R = \rho \frac{l}{s}$

Ici : $R = \rho \frac{l}{\pi a_1^2}$

soit $r = \frac{\rho}{\pi a_1^2}$

soit $\Delta V = V_1 - V_2$ la ddp entre les 2 conducteursla capacité C' sur une longueur l est définie par $Q = C'(V_1 - V_2)$ où Q est la charge portée par le conducteur au potentiel V_1 sur la longueur l .La charge Q est obtenue par th. Gauss ici le champ E est radial, ne dépend que de r
En r , $E \times 2\pi r l = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r l}$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E dr = -\frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r l} dr$$

$$V_2 - V_1 = -\frac{Q}{2\pi \epsilon_0 l} \ln \frac{a_2}{a_1} \rightarrow Q = 2\pi \epsilon_0 l \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{a_2}{a_1}}$$

Ainsi $C' = \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln \frac{a_2}{a_1}}$ et $C = \frac{C'}{l} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln \frac{a_2}{a_1}}$

La conductance de fuite de l'isolant peut s'imaginer comme une succession de résistances en série de forme cylindrique allant de a_1 à a_2 , parcourues par un courant de fuite radial.

Pour l'une d'elles $dr = \frac{1}{\sigma 2\pi r l}$

On ajoute les résistances : $r_{\text{fuite}} = \frac{1}{\sigma 2\pi l} \ln \frac{a_2}{a_1}$

On inverse pour avoir la conductance sur la hauteur l du cylindre : $g_{\text{fuite}} = \frac{\sigma 2\pi l}{\ln \frac{a_2}{a_1}}$

Par unité de longueur

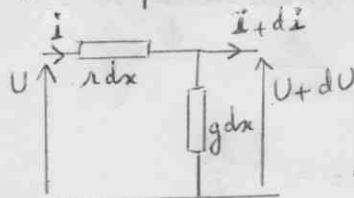
$$g = \frac{\sigma 2\pi}{\ln \frac{a_2}{a_1}}$$

2) AN : $r = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{\pi \times 2 \times 10^{-6}} = 1,6 \cdot 10^{-3} \Omega \cdot m^{-1}$

$$C = \frac{2\pi}{36\pi \cdot 10^9 \ln \frac{5,4}{2}} = 55 \cdot 10^{-12} = 55 \text{ pF} \cdot m^{-1}$$

$$g = \frac{10^{-6} \cdot 2\pi}{\ln \frac{5,4}{2}} = 6,3 \cdot 10^{-6} S \cdot m^{-1}$$

II) On peut alors schématiser le câble : (sachant qu'en continu une capacité est un corps-circuit)



$$dU = -r dx i$$

$$U + dU = -\frac{di}{g dx}$$

avec $dU \ll U$: $U = -\frac{di}{g dx}$

on a bien : $\frac{di}{dx} = -U g$ et $\frac{dU}{dx} = -r i$

2) Éliminer i en dérivant

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = -r \frac{di}{dx} = U g r \rightarrow \frac{d^2 U}{dx^2} - g r U = 0$$

Solution $U = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x}$ avec $\alpha = \sqrt{g r}$

AN $\alpha = \sqrt{6,3 \cdot 10^{-6} \cdot 1,6 \cdot 10^{-3}} = 10^{-4} m^{-1}$

3) Si le câble est fermé en l sur R_u alors $U(l) = R_u i(l)$

Nous trouvons i par $i = -\frac{1}{r} \frac{dU}{dx}$

soit $i = -\frac{1}{r} \alpha (A e^{\alpha x} - B e^{-\alpha x})$

Ainsi en l : $A e^{\alpha l} + B e^{-\alpha l} = -R_u \frac{\alpha}{r} (A e^{\alpha l} - B e^{-\alpha l})$

D'autre part on a imposé U_0 à l'entrée

donc $U_0 = A + B$

Après calculs on obtient :

$$A = \frac{(R_u \frac{\alpha}{r} - 1) e^{-\alpha l} U_0}{e^{\alpha l} (1 + \frac{R_u \alpha}{r}) - e^{-\alpha l} (1 - \frac{R_u \alpha}{r})}$$

$$B = \frac{(R_u \frac{\alpha}{r} + 1) e^{+\alpha l} U_0}{e^{\alpha l} (\frac{R_u \alpha}{r} + 1) + (\frac{R_u \alpha}{r} - 1) e^{-\alpha l}}$$

La résistance d'entrée R_e s'obtient par

$$U_0 = R_e i(0) \text{ avec } i(0) = -\frac{\alpha}{r} (A - B)$$

d'où après calculs :

$$R_e = \frac{r}{\alpha} \frac{(\frac{R_u \alpha}{r} + 1) e^{\alpha l} + (\frac{R_u \alpha}{r} - 1) e^{-\alpha l}}{(\frac{R_u \alpha}{r} + 1) e^{\alpha l} - (\frac{R_u \alpha}{r} - 1) e^{-\alpha l}}$$

4) On remarque que R_e est indépendante de l
si $\frac{R_u \alpha}{r} = 1$ $R_u = R'_u = \frac{r}{\alpha}$

alors $R_e = R'_e = \frac{r}{\alpha} = \sqrt{\frac{r}{g}}$

On aurait pour $l \rightarrow \infty$ $(R'_e = R'_e)$ normal car R'_e indépendant de la longueur de câble

III 1) Soit k la conductivité thermique

$\vec{j}_a = -k \text{ grad } T$ loi de Fourier

Le flux de chaleur s'écoule selon x
 $j_a = \frac{\Phi}{S_{traversee}} = \frac{\Phi}{\pi a^2}$ $\Phi \rightarrow (S)$

donc $\frac{\Phi}{\pi a^2} = -k \frac{dT}{dx} = -k \frac{d\theta}{dx}$

on a bien $\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\Phi(x)}{\pi a^2 k}$

La conductivité thermique k s'exprime en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ car $j_a \sim \frac{\text{Puissance}}{\text{Surface}}$ et $\text{grad } T \sim \frac{\text{Température}}{\text{Longueur}}$

2) La loi indiquée montre une dépendance de chaleur par la surface latérale $2\pi a dx$
 $\Phi(x) \xrightarrow{\text{surface lat}} \Phi(x+dx)$ En régime stationnaire

$\left(\begin{array}{c} \uparrow a \\ T(x) \end{array} \right) \quad \left(\Phi(x) - \Phi(x+dx) \right) = j_{a \text{ lat}} 2\pi a dx$
 $\text{flux} \quad \text{flux surfacique}$
 $-\frac{d\Phi}{dx} = 2\pi a j_{a \text{ lat}}$

La loi de Newton conducto-convection donne
 $j_{a \text{ lat}} = h'(T(x) - T_a) = h' \theta(x)$
 (sabat)

d'où $\frac{d\Phi}{dx} = -h' 2\pi a \theta(x)$ OK

h' représente le coefficient d'échange conducto-convectif. $h' \sim \frac{\text{Puissance}}{\text{Longueur} \times T^\circ}$

h' s'exprime donc en $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$

3) $\frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{1}{\pi a^2 k} \frac{d\Phi}{dx} = \frac{h' 2\pi a}{\pi a^2 k} \theta(x)$

$\rightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{2h'}{ak} \theta(x) = 0$

on remarque que $\frac{2h'}{ak} = \frac{K'}{K}$

donc $\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{K'}{K} \theta = 0$

Comme Φ est proportionnel à $\frac{d\theta}{dx}$ on a aussi
 $\frac{d^2\Phi}{dx^2} - \frac{K'}{K} \Phi = 0$ que l'on obtient en dérivant l'équation précédente / x .

Solution $\theta = A e^{-\sqrt{\frac{K'}{K}} x} + B e^{\sqrt{\frac{K'}{K}} x}$

C.L : $x \rightarrow \infty$ donc $B = 0$ car $\theta \not\rightarrow \infty$

$x = 0 \quad \theta = T_0 - T_a$

donc $\theta = (T_0 - T_a) e^{-\sqrt{\frac{K'}{K}} x}$

on déduit Φ par $\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\Phi}{\pi a^2 k}$

$\Phi = (T_0 - T_a) \sqrt{\frac{K'}{K}} \pi a^2 k e^{-\sqrt{\frac{K'}{K}} x}$

d'où $\Phi_0 = (T_0 - T_a) \sqrt{\frac{K'}{K}} \pi a^2 k$

Elec	Thermie
$\frac{dU}{dx} = -ri$	$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\pi a^2 k} \Phi$
$\frac{di}{dx} = -gU$	$\frac{d\Phi}{dx} = -h' 2\pi a \theta$

donc $U \leftrightarrow \theta$
 $i \leftrightarrow \Phi$

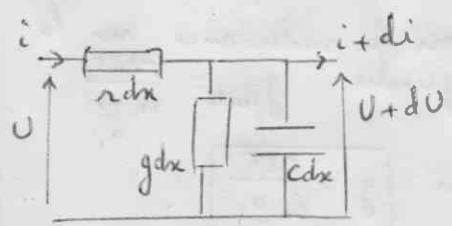
d'où $r_{th} = \frac{1}{\pi a^2 k} = \frac{1}{K}$ et $g_{th} = h' 2\pi a = K'$

on avait trouvé $R_e = \sqrt{\frac{1}{g}}$ en II 4

on déduit $R_{eth} = \sqrt{\frac{r_{th}}{g_{th}}} = \frac{1}{\sqrt{KK'}}$

IV 1) En régime variable la capacité n'est plus un cap-circuit ; il faut donc en tenir compte dans le schéma.

Elle porte effet entre la ligne au potentiel V_1 et celle au potentiel V_2 (nul), tout comme g . Elle est donc en parallèle avec g .



$dU = -r dx i$: loi d'ohm aux bornes de $r dx$

$U + dU = (g dx + j C \omega dx) (-di)$: loi d'ohm pour $g dx \parallel C dx$
 (négligeable) admittances en // s'ajoutent

d'où $\frac{dU}{dx} = -ri$ et $\frac{di}{dx} = -(g + j C \omega) U$
 $\underline{G} = g + j C \omega$

IV) b) Avec $\underline{U} = \underline{U}_0 e^{-(\lambda + j\mu)x}$ on obtient :

$$-(\lambda + j\mu)^2 = r(g + j\omega C) \text{ de l'équation}$$

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = -r \frac{d\underline{U}}{dx} = r(g + j\omega C) \underline{U}$$

On identifie partie réelle et partie imaginaire

$$\begin{cases} \lambda^2 - \mu^2 = rg \\ 2\lambda\mu = r\omega C \end{cases}$$

On élimine μ et on obtient une équation en λ^4 :

$$4\lambda^4 - 4rg\lambda^2 - r^2\omega^2 C^2 = 0$$

Poseons $X = 2\lambda^2$: $X^2 - 2rgX - r^2\omega^2 C^2 = 0$

Solutions : $X = rg \pm \sqrt{r^2 g^2 + r^2 \omega^2 C^2}$

La seule solution positive est :

$$2\lambda^2 = rg + \sqrt{r^2 g^2 + r^2 \omega^2 C^2}$$

soit $\lambda = \sqrt{\frac{rg + \sqrt{r^2 g^2 + r^2 \omega^2 C^2}}{2}}$ ($\lambda > 0$ pour obtenir l'atténuation de l'onde)

d'où $\mu = \frac{r\omega C}{\sqrt{2(rg + \sqrt{r^2 g^2 + r^2 \omega^2 C^2})}}$

La solution complexe complète est alors :

$$\underline{U}(x, t) = \underline{U}(x) e^{j\omega t} = \underline{U}_0 e^{-\lambda x} e^{j(\omega t - \mu x)}$$

L'onde de potentiel se propage vers $x \uparrow$ à la vitesse de phase $v_p = \frac{\omega}{\mu}$, avec une atténuation d'amplitude $e^{-\lambda x}$.

2) a) La conservation d'énergie en régime stationnaire conduit maintenant à :

$$\Phi(x) - \Phi(x+dx) = -d\varphi + 2\pi a k' (T(x) - T_a) dx$$

soi $\frac{\partial \Phi}{\partial x} > 0$ c'est pour un

flux entrant $\Phi(x)$ supérieur au flux sortant $\Phi(x+dx)$

$rg - d\varphi = + \mathcal{C} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx$ n'est autre que la variation d'enthalpie par unité de temps du morceau de conduite entre x et $x+dx$.

$\mathcal{C}$ est donc la capacité calorifique par unité de longueur de la conduite.

Ainsi $-\frac{d\Phi}{dx} dx = \mathcal{C} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + 2\pi a k' \theta dx$

soit $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\mathcal{C} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - K' \theta$ ($K' \equiv 2\pi a k'$)

La loi de Fourier se maintient en : (3)

$$\Phi = -\pi a^2 k \frac{\partial \theta}{\partial x} = -K \frac{\partial \theta}{\partial x} \text{ c'est-à-dire}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\Phi}{K}$$

2) b) On injecte la solution proposée $\theta(x) = \underline{\theta}_0 e^{-(\lambda' + j\mu')x}$ d'où après élimination de Φ en dérivant / x :

$$-K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\mathcal{C} \frac{\partial \theta}{\partial t} - K' \theta \text{ soit :}$$

$$-K(\lambda' + j\mu')^2 = -\mathcal{C} j\omega - K'$$

on fait alors l'analogie de calcul avec

IV) 1) b) où $(\lambda + j\mu)^2 = j\omega C + rg$
Il suffit de remplacer $r\omega C$ par $\frac{\mathcal{C}\omega}{K}$ et rg par K'/K

d'où $\lambda' = \sqrt{\frac{K'}{2K} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K'^2}{K^2} + \frac{\mathcal{C}^2 \omega^2}{K^2}}}$
 $\mu' = \frac{\mathcal{C}\omega}{K \sqrt{2 \left(\frac{K'}{K} + \sqrt{\frac{K'^2}{K^2} + \frac{\mathcal{C}^2 \omega^2}{K^2}} \right)}}$

L'impédance d'entrée complexe se définit par analogie avec $\underline{U} = Z \underline{i}$

d'où $\underline{\theta} = Z_{th} \underline{\Phi}$

on $\Phi = -K \frac{\partial \theta}{\partial x}$ et comme $\theta = \underline{\theta}_0 e^{j\omega t - (\lambda' + j\mu')x}$

on a $Z_{th} = \frac{1}{-K(-\lambda' + j\mu')} = \frac{1}{K(\lambda' + j\mu')}$