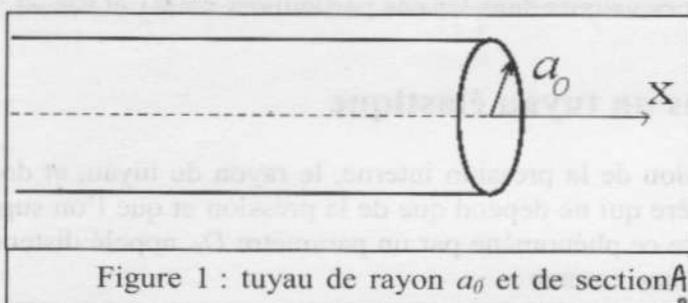


## PARTIE I – Ondes acoustiques dans un tuyau élastique

On considère un tuyau de section circulaire et d'axe Ox rempli d'un fluide (figure 1). Au repos, le fluide a une masse volumique  $\rho_0$  et une pression intérieure  $P_0$  identique à la pression extérieure (cette dernière sera supposée constante tout au long de cette partie). A l'équilibre, on suppose que le champ des vitesses est nul et que la section du tuyau est uniforme et notée  $A_0$ .

On s'intéresse à la propagation de perturbations acoustiques de petites amplitudes suivant l'axe Ox, ce qui permet de se limiter à une théorie linéaire. Les champs de vitesse, de pression, et de masse volumique s'expriment alors sous la forme :



$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x,t) &= u(x,t) \hat{\mathbf{u}}_x \\ P(x,t) &= P_0 + p(x,t) \\ \rho(x,t) &= \rho_0 + \rho_1(x,t) \end{aligned}$$

où  $\hat{\mathbf{u}}_x$  est le vecteur unitaire selon la direction Ox.  $u(x,t)$  est appelé la vitesse acoustique, et  $p(x,t)$  est la surpression par rapport à  $P_0$ . Le fluide étant supposé parfait, on considère que ces grandeurs sont uniformes sur une section du tuyau et que la compressibilité isentropique du

fluide  $\chi_s$  est donnée par la relation :

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s$$

Dans ce problème,  $\chi_s$  sera nommée compressibilité, et sera supposée constante.

### I.1 : Ondes acoustiques dans un tuyau rigide

On se place tout d'abord dans le cas où la section du tuyau ne dépend pas de la surpression.

□ 1 – Ecrire l'équation d'Euler linéarisée et en déduire une première équation différentielle entre la vitesse acoustique  $u(x,t)$  et la surpression  $p(x,t)$ .

□ 2 – Ecrire l'équation générale de conservation de la masse et montrer qu'elle se réduit ici, en se limitant toujours au 1<sup>er</sup> ordre, à l'équation différentielle:

$$\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$$

□ 3 – Montrer enfin que la surpression  $p(x,t)$  et la vitesse  $u(x,t)$  obéissent à une équation de type d'Alembert. En déduire l'expression de la célérité  $c$  de l'onde sonore, que l'on exprimera en fonction de  $\chi_s$  et de  $\rho_0$ .

Calculer la valeur de  $c$  pour l'eau de mer :  $\rho_0 = 1050 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\chi_s = 5,2 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$

Physique I année 2006; filière PC

(Question indépendante des précédentes)

□ 4 – Soit un tuyau dans lequel se propage une onde acoustique progressive monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  dans le sens des  $x$  croissants. La célérité de l'onde acoustique est  $c$ . La surpression associée est notée  $p_e(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = p_e \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$

En  $x=0$ , une certaine partie de l'onde est réémise en direction des  $x$  négatifs : la surpression associée à cette onde réfléchie est notée  $p_r(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ . On suppose aussi qu'au point  $x=0$  on a  $p_r = r p_e$  avec  $r \in [-1 ; +1]$ . Exprimer alors la pression totale pour les valeurs de  $x$  négatives et montrer qu'il apparaît des ventres de pression pour des valeurs de  $x$  qu'on exprimera en fonction de  $\lambda$ , la longueur d'onde. On pourra utiliser la notation complexe.

## I.2 : onde acoustique dans un tuyau élastique

Sous l'effet d'une augmentation de la pression interne, le rayon du tuyau, et donc son aire  $A$ , peuvent varier d'une manière qui ne dépend que de la pression et que l'on supposera isentropique. On peut alors décrire ce phénomène par un paramètre  $D_S$ , appelé distensibilité (isentropique) du tuyau qui s'exprime comme :

$$D_S = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial P} \right)_S$$

Dans ce problème, pour un tuyau donné, la distensibilité sera supposée constante.

On suppose aussi que cette variation de l'aire du tuyau est suffisamment faible pour conserver les hypothèses de linéarité de la partie précédente. De plus, on suppose qu'en tout point la dérivée temporelle du rayon est beaucoup plus petite que la vitesse acoustique  $u(x,t)$  calculée dans le cas d'un tuyau rigide. L'aire du tuyau à l'équilibre sera noté  $A_0$ .

□ 5 – Montrer que l'équation de conservation de la masse permet d'écrire la relation :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho(x,t) u(x,t) A(x,t)) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho(x,t) A(x,t)) = 0$$

qui, sous nos hypothèses, peut s'écrire :

$$\rho_0 A_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho(x,t) A(x,t))}{\partial t} = 0$$

En déduire la relation:

$$(\chi_S + D_S) \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$$

□ 6 – Montrer que la surpression  $p(x,t)$  et la vitesse acoustique  $u(x,t)$  obéissent à une équation d'onde de type d'Alembert avec une célérité  $c$  que l'on exprimera en fonction de  $\chi_S$ ,  $D_S$  et  $\rho_0$ . En comparant avec le résultat de la question 3, discuter des effets de la distensibilité d'un tuyau sur la propagation acoustique. En particulier, ce modèle permet-il

d'aborder la propagation dans les fluides incompressibles ?

□ 7 – On cherche à exprimer la distensibilité du tuyau en fonction de ses caractéristiques mécaniques et géométriques. On suppose que le tuyau est un cylindre creux dont la paroi a une épaisseur  $h$  petite devant le rayon intérieur  $a_0$  (figure 2).

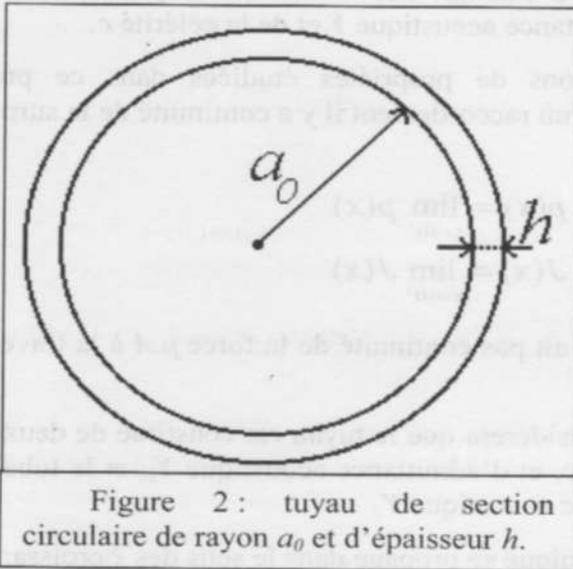


Figure 2 : tuyau de section circulaire de rayon  $a_0$  et d'épaisseur  $h$ .

On admettra que la distensibilité  $D_S$  d'un tel tuyau est liée au module d'Young  $E$  du matériau composant le tuyau par la relation :

$$D_S = \frac{a_0}{E h}$$

Montrer que, pour des fluides incompressibles, on retrouve la formule, dite de Moens-Korteweg :

$$c^2 = \frac{E h}{a_0 \rho_0}$$

□ 8 – Pour un tube en acier, le module d'Young vaut  $E = 10^{11}$  Pa, alors que pour un tuyau en caoutchouc,  $E$  vaut typiquement  $10^6$  Pa. Calculer les distensibilités pour un tube en acier et un autre en caoutchouc, tous deux de

rayon 1 cm et d'épaisseur 2 mm.

En déduire la célérité des ondes dans les deux cas quand le tube est rempli d'eau de mer et comparer avec la célérité obtenue à la question 3. Quel est, dans chaque cas, le facteur prédominant (compressibilité ou distensibilité) ? Dans quel cas la formule de Moens-Korteweg est-elle valide ?

□ 9 Montrer que, pour une onde progressive dans le sens des  $x$  croissants, on peut définir une grandeur  $Y$  telle que le débit volumique  $J(x,t)$  soit relié à la surpression  $p(x,t)$  par la relation :

$$J\left(t - \frac{x}{c}\right) = Y p\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Montrer que  $Y = \frac{A_0}{\rho_0 c}$ .

Dans ce problème,  $Y$  sera appelée admittance acoustique (Noter qu'on définit ici une admittance acoustique comme une expression reliant le débit –et non la vitesse– à la surpression).

Calculer cette admittance acoustique pour les deux exemples de la question 8.

Physique 1 année 2006; filière PC

### I.3 : Analyse quantitative d'un changement de tuyau

On étudie maintenant l'influence d'une modification, en  $x=0$ , des propriétés du tuyau. Celle-ci peut être un changement de la section ou de l'épaisseur du tuyau ou un changement dans ses propriétés mécaniques (module d'Young). Ces modifications peuvent conduire à un changement dans les valeurs de l'admittance acoustique  $Y$  et de la célérité  $c$ .

On supposera que les modifications de propriétés étudiées dans ce problème permettront d'admettre qu'à la traversée d'un raccordement il y a continuité de la surpression et du débit volumique:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} p(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} p(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} J(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} J(x)$$

□ 10 – Comment expliquer qu'il n'y ait pas continuité de la force  $p.A$  à la traversée de la discontinuité ?

Pour simplifier les notations, on considérera que le tuyau est constitué de deux tubes : le tube 1 pour les  $x$  négatifs, de célérité  $c_1$  et d'admittance acoustique  $Y_1$ , et le tube 2 pour les  $x$  positifs, de célérité  $c_2$  et d'admittance acoustique  $Y_2$ .

□ 11 – Une onde progressive harmonique se propage dans le sens des  $x$  croissants dans le tube 1. La surpression associée est notée  $p_e(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c_1}\right)$ . En  $x=0$  vont apparaître

une onde réfléchie  $p_r(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$  et une onde transmise  $p_t(x,t) = h\left(t - \frac{x}{c_2}\right)$ .

Exprimer, en fonction de  $f$  et des admittances  $Y_1$  et  $Y_2$ , les fonctions  $g$  et  $h$ . Donner

l'expression du coefficient de réflexion  $r = \frac{g}{f}\Big|_{x=0}$ .

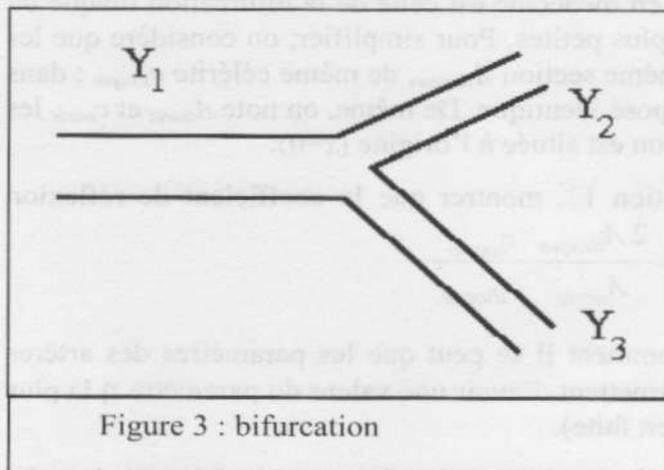
A quelle condition sur  $Y_1$  et  $Y_2$  n'y a-t-il pas d'onde réfléchie ?

□ 12 – Rappeler l'expression du vecteur densité surfacique de puissance acoustique en fonction de la surpression  $p$  et de la vitesse  $u$ . En déduire l'expression de la puissance  $\mathcal{P}$  à travers un tuyau en fonction de la surpression et de l'admittance.

On note  $\mathcal{P}_i$  et  $\mathcal{P}_r$  les puissances mesurées au voisinage de l'origine et associées aux ondes incidente et réfléchie respectivement.

Exprimer le coefficient de réflexion en puissance  $R = \frac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_i}$  en fonction de  $Y_1$  et  $Y_2$ .

En prenant les valeurs des admittances acoustiques trouvées à la question 9, calculer  $R$ . Au vu de ce résultat, expliquez ce qui se passe en pratique lorsque l'on raccorde un tuyau d'arrosage (en caoutchouc) à un tuyau rigide (tuyau en cuivre, ou raccords « rapides » en plastique rigide).



□ 13 – On considère le cas d'un branchement multiple (figure 3). Dans le cas le plus général, le tube 1, de célérité  $c_1$  et d'admittance acoustique  $Y_1$ , est relié au tube 2, de célérité  $c_2$  et d'admittance acoustique  $Y_2$ , et au tube 3 de célérité  $c_3$  et d'admittance acoustique  $Y_3$ . On recherche alors l'expression de la surpression réfléchie :

$$p_r(x,t) = g \left( t + \frac{x}{c_1} \right)$$

et celles des surpressions transmises :

$$p_{t,k}(x,t) = h_k \left( t - \frac{x}{c_k} \right) \quad k \in \{2,3\}.$$

On se place dans un cas simple où les tubes 2 et 3 sont identiques (même section, même célérité) : de plus, on admettra qu'ils ont même débit volumique. Déterminer alors la surpression réfléchie et les surpressions transmises dans chaque tuyau en fonction de l'onde incidente, des célérités ( $c_1$  et  $c_2$ ) et des admittances ( $Y_1$  et  $Y_2$ ).

Que doivent vérifier ces grandeurs pour qu'il n'y ait aucune onde réfléchie ?

#### I.4 : Application à la circulation sanguine

Dans un modèle très simplifié, on peut considérer que les vaisseaux sanguins entrent dans le modèle étudié dans la section précédente (I.3), et plus particulièrement les artères. On considérera dans ce problème une artère particulière : l'aorte. Elle est reliée d'un côté au cœur, que l'on considérera comme une source de pression, et de l'autre côté au réseau artériel périphérique.

L'aorte est correctement modélisée par un tuyau élastique de section circulaire analogue à celui étudié dans la partie I.2 (rayon  $a_0=1\text{cm}$ , épaisseur  $h=2\text{ mm}$ ) et on considérera que son module d'Young  $E$  vaut typiquement  $10^6\text{ Pa}$ . Le sang sera simplement modélisé comme un fluide parfait ayant les mêmes propriétés que l'eau de mer.

Le modèle proposé ici est un cas extrêmement simplifié du système sanguin : en effet, il ne traite pas de la circulation sanguine. Dans le présent problème, le cœur n'est vu que comme source de pression. En réalité, sa fonction première est d'éjecter à peu près toutes les secondes un volume de sang de l'ordre du décilitre avec une vitesse de l'ordre de  $1\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Cependant, même en ignorant cet aspect essentiel du système circulatoire sanguin, l'analyse des ondes acoustiques dans les artères montre qu'il peut exister des réflexions parasites liées à certaines pathologies. Ces réflexions parasites vont alors créer des surpressions au niveau du cœur : le muscle cardiaque aura alors un effort supplémentaire à fournir pour s'affranchir de ces surpressions, ce qui est à l'origine de certaines maladies telles que l'hypertrophie cardiaque.

□ 14 – En supposant que la surpression acoustique engendrée par le cœur est de  $5 \cdot 10^3\text{ Pa}$ , calculez l'accroissement relatif du rayon de l'artère.

Physique I année 2006; filière PC

□ 15 – Une application importante en médecine est celle de la bifurcation iliaque où l'aorte se sépare en deux artères iliaques plus petites. Pour simplifier, on considère que les deux artères iliaques sont identiques, de même section  $A_{iliaque}$ , de même célérité  $c_{iliaque}$  : dans ces deux artères iliaques, le débit sera supposé identique. De même, on note  $A_{aorte}$  et  $c_{aorte}$  les mêmes grandeurs pour l'aorte. La bifurcation est située à l'origine ( $x=0$ ).

En utilisant les résultats de la question 13, montrer que le coefficient de réflexion  $r = \frac{g}{f} \Big|_{x=0}$  s'écrit :  $r = \frac{1-\eta}{1+\eta}$  avec  $\eta = \frac{2 A_{iliaque} c_{aorte}}{A_{aorte} c_{iliaque}}$

Commenter le résultat et montrer comment il se peut que les paramètres des artères iliaques et de l'aorte (rayon, épaisseur) permettent d'avoir une valeur du paramètre  $\eta$  la plus proche de l'unité possible (la nature est bien faite).

L'artériosclérose est une pathologie du système vasculaire très répandue. A la suite d'une dégénérescence du tissu artériel apparaît une calcification de la paroi artérielle, que l'on appellera plaque : à cette étape du processus, le rayon de l'artère est inchangé. Cette modification peut dans un second temps évoluer vers la sténose : la plaque s'épaissit à l'intérieur du conduit, réduisant alors son rayon.

□ 16 – On considère dans cette question une artère idéale (et donc infinie) constituée de deux portions : artère saine pour les  $x$  négatifs, et artère avec plaques pour les  $x$  positifs. Dans cette question, on supposera que la géométrie de la partie de l'artère atteinte d'artériosclérose est inchangée, seul son module d'Young s'accroît pour atteindre  $10^8$  Pa. Le rayon de l'artère (tant pour les  $x$  positifs que pour les  $x$  négatifs) est de 1 cm.

Calculer la célérité de l'onde acoustique pour les deux portions de l'artère. Calculer, pour une surpression de  $5 \cdot 10^3$  Pa, la variation de rayon de l'artère avec plaques : commenter le résultat. En utilisant les résultats de la question 11, calculer la portion d'onde qui sera réfléchiée vers les  $x$  négatifs. En utilisant les résultats de la question 4, tracer l'allure de la pression pour les  $x$  négatifs pour une onde harmonique de fréquence  $f=5$  Hz.

FIN DE LA PREMIERE PARTIE

Tournez s'il vous plaît

1) Euler :  $\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u}}_{\text{terme non linéaire}} \right) = -\text{grad} f + \rho \vec{g}$  (pas de viscosité) (fluide "parfait")  $\rightarrow \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\text{grad} f + \rho \vec{g}$

• Ox horizontal et  $f$  ne dépend que de  $x$  (pas de coord. verticale) : ceci revient à négliger l'effet de  $\vec{g}$

•  $\rho \vec{g}$  sur Ox :  $(\rho_0 + \rho_1) \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x}} \quad (1)$

• linéariser  $\rightarrow$  négliger  $\rho_1 \frac{\partial u}{\partial t}$  non linéaire

2) conservation de masse :  $\text{div}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{div}(\rho_0 + \rho_1) u + \frac{\partial (\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0} \quad (2)$

•  $\rho_0$  constante ;  $\rho_1, u$  non du 1<sup>er</sup> ordre

3) La question exige de se débarrasser de  $\rho_1$  puisque on ne veut que  $u$ , ou  $f$ .

•  $\chi_s = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_s \Rightarrow \chi_s = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial f_1}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \rho_0 \chi_s \frac{\partial f_1}{\partial t} \xrightarrow{(2)} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho_0 \chi_s \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0 \quad (2')$

• linéariser 1<sup>er</sup> ordre

• (1) à dériver /  $x$  :  $\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}$   
 • (2') à dériver /  $t$  :  $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \chi_s \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \chi_s \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 \chi_s} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 0}$   
 D'Alembert

$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$

• De  $\tilde{m}$  pour  $u$  en dérivant (1)/ $t$  et (2')/ $x$  pour éliminer cette fois  $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial t}$

AN :  $c = \frac{1}{\sqrt{1050 \times 5,2 \times 10^{-10}}} = 1353 \text{ m.s}^{-1}$  dans l'eau de mer

4) Pour  $x < 0$ , en notation complexe :  $f = f_0 e^{i\omega t} = f_0 e^{j\omega t} [e^{-jkx} + \alpha e^{jkx}]$   
 onde progressive monochromatique  
 • Module (comme en optique) :  $|f|^2 = f_0^2 (1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2kx)$  calcul  $(f_0 (e^{-jkx} + \alpha e^{jkx})) (f_0^* (e^{jkx} + \alpha e^{-jkx})) = f_0^2 (1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2kx)$   
 si  $\alpha > 0$  alors  $|f|^2$  est max (ventée de pression) pour  $\cos 2kx = +1$  soit pour  $2kx = 2n\pi$   $n \in \mathbb{N}$   
 Avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  cela donne  $x = -\frac{n\lambda}{2}$  ventées pour  $\alpha > 0$   
 si  $\alpha < 0$  alors  $|f|^2$  est max pour  $\cos 2kx = -1$ ; cela donne  $x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$   $n \in \mathbb{N}$  (on veut  $x < 0$ )

5) Bilan de masse pendant  $dt$  :  $m_{\text{entrant en } x} - m_{\text{sortant de } x+dx} = \text{variation de masse de la zone } A dx$

$\rightarrow dt(\rho A u)_{x(x)} - (\rho A u)_{x+dx} = \frac{\partial (\rho A dx)}{\partial t} dt$   
 $\rightarrow -\frac{\partial (\rho A u)}{\partial x} dx dt = \frac{\partial (\rho A)}{\partial t} dx dt \Rightarrow \boxed{\frac{\partial (\rho A u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho A)}{\partial t} = 0}$

on admet sous les hyp citées que ça s'écrit  $\rho_0 A_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (\rho A)}{\partial t} = 0$

énoncé :  $\chi_s = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_s$  et  $D_s = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_s$   
 hyp isentropique  $\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_s \frac{\partial f}{\partial t}$   
 •  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_s = \rho \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_s + A \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_s$   
 $\rightarrow \frac{\partial (\rho A)}{\partial t} = \rho A D_s + A \rho \chi_s \frac{\partial f}{\partial t} = \rho A (D_s + \chi_s) \frac{\partial f}{\partial t}$   
 $\rightarrow$  d'où  $\rho_0 A_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho A (D_s + \chi_s) \frac{\partial f}{\partial t} = 0$

•  $D_s$  le produit  $\rho A (D_s + \chi_s) \frac{\partial f}{\partial t}$  on peut assimiler  $\rho A \approx \rho_0 A_0$  ; alors  $\rho_0 A_0$  se simplifie (s'élimine)

$\rightarrow \boxed{(\chi_s + D_s) \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0} \quad (6)$

6) Euler typ variable  $\tilde{m}$  si  $A$  dépend de  $f$  donc combiner (6) et (1)  $\rightarrow \boxed{\rho_0 (\chi_s + D_s) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0}$

$\rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 (\chi_s + D_s)}}$   
 où la distensibilité diminue la vitesse de propagation  
 Pour un fluide incompressible  $\chi_s = 0$  (ou  $\chi_s \ll D_s$ )  
 et  $\tilde{m} = 1$

7) .. On veut de montrer que  $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 D_s}}$  pour le cas incompressible, c'ad  $\chi_s = 0$  (2)

$$\rightarrow c^2 = \frac{1}{\rho_0 D_s} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{Eh}{\rho_0}$$

énoncé :  $D_s = \frac{a_0}{Eh}$

8) AN sur  $D_s$   $D_{s \text{ acier}} = \frac{10^{-2}}{10^{11} \cdot 2 \times 10^{-3}} = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$  et  $D_{s \text{ caoutchouc}} = D_{s \text{ acier}} \cdot \frac{10^{11}}{10^6} = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$

AN sur  $c$  sans négliger  $\chi_s$  c'ad la compressibilité.  
 $c_{\text{acier}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \text{ eau de mer} (D_{s \text{ acier}} + \chi_{s \text{ acier}})}} = \frac{1}{\sqrt{1050 \cdot (0,5 \cdot 10^{-10} + 5,2 \cdot 10^{-10})}} = 1,29 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$c_{\text{caoutchouc}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \text{ caoutchouc} (D_{s \text{ caoutchouc}} + \chi_{s \text{ caoutchouc}})}} = \frac{1}{\sqrt{1050 \cdot (0,5 \cdot 10^{-5} + 5,2 \cdot 10^{-10})}} = 13,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

*négligeable*

Cas acier : les 2 facteurs semblent équivalents, le résultat est + influencé par la compressibilité (car on retrouve  $c_{\text{eau de mer}}$  calculé en 3)

Cas caoutchouc : le facteur dominant est la distensibilité, la formule  $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 D_s}}$  est valable et la compressibilité est négligeable.

9) .  $J \approx A u$

Euler linéarisée :  $\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial (J/A)}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x}$

$\frac{\partial (J/A)}{\partial t} = \frac{1}{A} \frac{\partial J}{\partial t} + J \frac{\partial (1/A)}{\partial t}$  mais  $\frac{\partial (1/A)}{\partial t}$  est liée à  $\frac{\partial r}{\partial t}$  ; or "la dérivée temporelle du rayon est b + petite que u, donc J"  
 $\Rightarrow \frac{\partial (J/A)}{\partial t} \approx \frac{1}{A_0} \frac{\partial J}{\partial t}$

$$\Rightarrow \frac{\rho_0}{A_0} \frac{\partial J}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x}$$

onde en  $(t - \frac{x}{c}) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial (t - \frac{x}{c})}$  et  $\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial (t - \frac{x}{c})} \Rightarrow \frac{\rho_0}{A_0} \frac{\partial J}{\partial (t - \frac{x}{c})} = \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial (t - \frac{x}{c})}$

Intégrer  $\rightarrow \frac{\rho_0}{A_0} J = \frac{1}{c} f$  (au repos, tout s'annule) donc  $J = \frac{A_0}{\rho_0 c} f$  et  $Y = \frac{A_0}{\rho_0 c}$

AN Acier :  $Y_{\text{acier}} = \frac{\pi \times (10^{-2})^2}{1050 \times 1,29 \cdot 10^3} = 2,32 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1}$

Caoutchouc :  $Y_{\text{caoutchouc}} = \frac{\pi \times (10^{-2})^2}{1050 \times 13,8} = 2,17 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1}$

10) Ce qui est contenu, c'est la surpression dans chacun des bras (à gauche et à droite). Comme la section A peut varier brusquement, on n'a donc pas forcément continuité de pA.

11) Continuité (admiss) de la pression :  $f_c + f_n = f_t \rightarrow f + g = h$  en  $x=0$   
 de  $J = Au = Yf$  :  $\frac{1}{2} f_c + (-\frac{1}{2}) f_n = \frac{1}{2} f_t \rightarrow \frac{1}{2} f - \frac{1}{2} g = \frac{1}{2} h$  en  $x=0$

(Rq si l'onde va en sens inverse, on verrait ds la démonst du 9) apparaître un + au lieu de -)  
 c'ad on aurait  $(\chi_s + D_s) i \omega f + i \omega u = 0$ . Du coup  $\frac{1}{\rho_0 c} f_n$  donc  $\chi_n = -\frac{A_0}{\rho_0 c} = -\frac{Y}{c}$

Système résolu  $\rightarrow g = f \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2}$  et  $h = f \frac{2Y_1}{Y_1 + Y_2}$  d'où  $r = \frac{g}{f} = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2}$  Pas d'onde réfléchie si  $r=0$  c'ad  $Y_1 = Y_2$

12) Analyse dimensionnelle : puissance surfacique  $\sim \frac{\text{énergie}}{\text{temps surface}}$   
 $f v \sim \text{énergie}$  donc  $f \sim \frac{\text{énergie}}{\text{volume}}$   
 $u \sim \frac{f}{t}$   
 $\rightarrow$  puissance surfacique =  $f u$

puissance à travers la surface A :  $P = A f u \Rightarrow P = J f = Y f^2$

cf 9)  $\chi = Y f$

Application :  $D_n = \frac{Y_n}{Z_n} = \frac{Y_n}{\rho c} = \frac{Y_n}{\rho \sqrt{g}}$   $\Rightarrow \frac{D_n}{D_i} = \frac{Y_n}{Y_i} = r^2 = \left( \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} \right)^2$  on enlève le signe - car  $\textcircled{3}$   
 $D_i = \frac{Y_e}{Z_e} = \frac{Y_e}{\rho c}$  une puissance est +

AN :  $Y_1 = Y_{\text{caoutchouc}} = 2,17 \cdot 10^{-8}$   
 $Y_2 = Y_{\text{acier}} = 2,32 \cdot 10^{-10} \Rightarrow R = \left( \frac{2,17 \cdot 10^{-8} - 2,32 \cdot 10^{-10}}{2,17 \cdot 10^{-8} + 2,32 \cdot 10^{-10}} \right)^2 = 0,96$  (ne pas approximer)

La puissance est presque totalement réfléchie : tenir ferme le tuyau d'arrosage

13) tuyaux (2) et (3) de même section, même c  $\Rightarrow Y_2 = Y_3$   
 $Y = \frac{A_0}{\rho c}$   $\Rightarrow t_2 = t_3$

hyp. même débit volumique pour 2 et 3  $\Rightarrow v_2 = v_3$  car  $Y_2 t_2 = Y_3 t_3$

$\Delta \rightarrow$  Continuité de  $f$  en  $x=0 \rightarrow t_1 + t_r = t_2 + t_3$  soit  $f + g = h_2 + h_3$

Continuité de  $J$  en  $x=0 \rightarrow Y_1 t_1 - Y_r t_r = Y_2 t_2 + Y_3 t_3$  soit  $Y_1 f - Y_r g = Y_2 (h_2 + h_3)$

La surpression est une grandeur intensive ; elle s'ajoute pour l'onde incidente et réfléchie  
 mais elle est identique pour chaque entrée de tuyau de transmission

$h_2 = h_3 \rightarrow Y_1 (f - g) = 2h_2 Y_2 \Rightarrow h_2 = \frac{2Y_1}{2Y_2 + Y_1} f$  et  $g = \frac{Y_1 - 2Y_2}{Y_1 + 2Y_2} f$  soit  $t_2 = t_3 = t_i \frac{2Y_1}{Y_1 + 2Y_2}$   
 $t_r = \frac{Y_1 - 2Y_2}{Y_1 + 2Y_2} t_i$

Si aucune onde réfléchie, alors  $t_r = 0$  soit  $Y_1 = 2Y_2$

14) cf I.2 par la définition de  $D = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right) \Rightarrow \frac{a_0}{Eh} = \frac{\partial A}{A} \cdot \frac{1}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial A}{A} = \frac{a_0}{Eh} \partial t$   
 $D = \frac{a_0}{Eh}$   
 $A = \pi a_0^2 \rightarrow \frac{\partial A}{A} = 2 \frac{\partial a_0}{a_0} \Rightarrow \frac{\partial a_0}{a_0} = \frac{a_0 \partial t}{2Eh} = \frac{10^{-2}}{2 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-3}} \cdot 5 \cdot 10^3 = 1,25 \cdot 10^{-2}$

15) cf 13  $r = \frac{g}{f} = \frac{Y_1 - 2Y_2}{Y_1 + 2Y_2} = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}$  avec  $\gamma = \frac{2Y_2}{Y_1}$   
 cf 9  $Y = \frac{A_0}{\rho c}$  donc  $Y_1 = \frac{A_{\text{aorte}}}{\rho c_{\text{aorte}}}$  et  $Y_2 = \frac{A_{\text{iliaque}}}{\rho c_{\text{iliaque}}}$   $\Rightarrow \gamma = 2 \frac{A_{\text{iliaque}} c_{\text{aorte}}}{A_{\text{aorte}} c_{\text{iliaque}}}$

$A_{\text{iliaque}} < A_{\text{aorte}}$  et même  $A_{\text{iliaque}} \approx \frac{1}{2} A_{\text{aorte}}$  car "l'aorte se sépare en 2 iliaques"  
 Si on cherche  $\gamma \approx 1$  il faut donc que  $c_{\text{iliaque}} \approx \frac{1}{2} c_{\text{aorte}}$  ce qui peut se concevoir.

16)  $E = 10^6 \text{ Pa}$  pour une artère saine (lire énoncé I.4)  $\rightarrow$  l'artère correspond au caoutchouc  
 $\rightarrow$  utiliser les AN du 8) où  $D_{\text{caoutchouc}} = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ Po}^{-1}$  et  $c_{\text{caoutchouc}} = 13,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$   
 $\rightarrow c_{\text{artère saine}} = 13,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$   
 $E = 10^8 \text{ Pa}$  pour une artère artériosclérotisée  $\Rightarrow c_{\text{artère artériosclérotisée}} = 10 c_{\text{artère saine}}$  car  $E_{\text{artère artériosclérotisée}} = 10 E_{\text{artère saine}}$   
 $c = \sqrt{\frac{Eh}{\rho}}$  seul  $E$  varie  
 $\rightarrow c_{\text{artère artériosclérotisée}} = 138 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

cf 14)  $\frac{\partial a_0}{a_0} = \frac{a_0 \partial t}{2Eh} = \frac{10^{-2}}{2 \times 10^8 \times 2 \cdot 10^{-3}} \times 5 \cdot 10^3 = 1,25 \cdot 10^{-4}$  l'artère artériosclérotisée est - saignée.

cf 11)  $r = \frac{g}{f} = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} = \frac{1 - \frac{Y_2}{Y_1}}{1 + \frac{Y_2}{Y_1}} \Rightarrow r = \frac{1 - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}}{1 + \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}} = \frac{1 - 0,1}{1 + 0,1} = 0,82$  très forte réflexion  
 $Y = \frac{A_0}{\rho c}$  "seul  $E$  varie"  
 $c = \sqrt{\frac{Eh}{\rho}}$   $E_2 = 10^2 E_1$

$\rightarrow$  onde avec ventre et nœud : ventres en  $x = -n \frac{\lambda}{2}$  avec  $\lambda = \frac{c}{f} \rightarrow \frac{\lambda}{2} = \frac{138}{5 \times 2} = 1,38 \text{ m}$   
 $t_{\text{max}} = t_0 (1+r)$  et  $t_{\text{min}} = t_0 (1-r)$