

PROBLÈME 1

La circulation sanguine

Le 18 décembre 2013 à l'hôpital européen Georges-Pompidou de Paris, le premier cœur 100 % artificiel et autonome était implanté sur un patient. Cette prouesse n'aurait pu être réalisée sans les nombreuses découvertes théoriques et expérimentales qui l'ont précédée. Aussi, nous nous proposons, dans ce problème, d'en étudier un des aspects : la circulation sanguine. Ce domaine de la physiologie est appelé l'hémodynamique.

La **figure 1** représente le système vasculaire humain. La cavité droite du cœur envoie le sang appauvri en dioxygène dans les poumons à travers l'artère pulmonaire. Les poumons enrichissent le sang en dioxygène. Le sang enrichi en dioxygène retourne dans le côté gauche du cœur et irrigue l'ensemble du corps puis revient au côté droit par la veine cave. Le système vasculaire issu de l'aorte se divise en artères, puis artérioles et capillaires. Le **tableau 1** page suivante donne, chez l'homme, le diamètre des différents types de vaisseaux et leur nombre.

Le cœur humain pèse environ 0,3 kilogramme et bat environ une fois toutes les secondes lorsqu'il est au repos. À chaque battement, son côté gauche injecte 80 cm^3 de sang par l'aorte à la pression de 16 kPa. La puissance mécanique massique totale du cœur est de 5 W.kg^{-1} . Pour une durée de vie d'environ 80 années, cela en fait une source de travail remarquable.

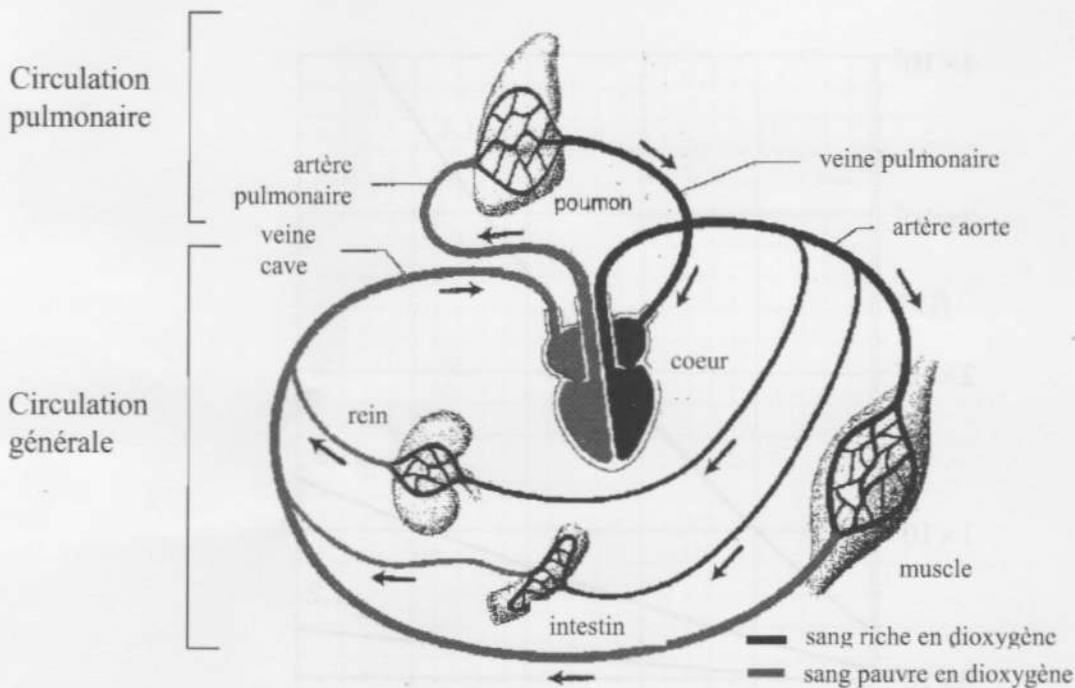


Figure 1 – Le système vasculaire humain

Le côté gauche du cœur est représenté à droite et le côté droit à gauche.

Vaisseau	Diamètre $2a$ (mm)	Nombre N
Artère aorte	10^1	1
Grandes artères	3	$4 \cdot 10^1$
Branches principales	1	$6 \cdot 10^2$
Branches secondaires	$6 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^3$
Branches tertiaires	10^{-1}	$8 \cdot 10^4$
Artères terminales	$5 \cdot 10^{-2}$	10^6
Branches terminales	$3 \cdot 10^{-2}$	10^7
Artérioles	$2 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^7$
Capillaires	$8 \cdot 10^{-3}$	10^9

Tableau 1 – Diamètres et nombres des différents types de vaisseaux chez l’homme

Le biologiste anglais C. Murray a étudié la relation qui existe entre le diamètre d’un vaisseau et le nombre de vaisseaux semblables. La **figure 2** où sont portés en échelle logarithmique les nombres de vaisseaux N en fonction de leur rayon a met en évidence cette relation.

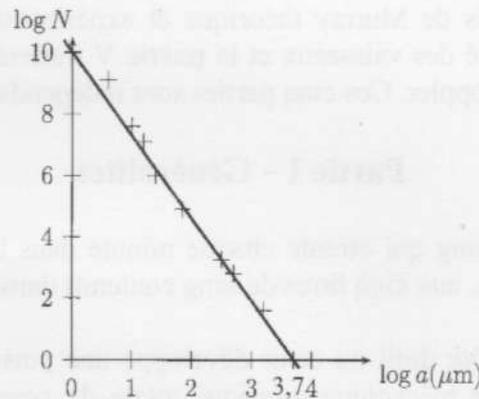


Figure 2 – Nombre de vaisseaux N en fonction de leur rayon a

Cette relation peut être interprétée par un modèle simple. Le système vasculaire y est alors décrit par deux types de vaisseaux : des artères et des vaisseaux capillaires. Il est supposé être composé de N_a artères de longueur L_a et de rayon r_a , et de N_c vaisseaux capillaires de longueur L_c et de rayon r_c (**figure 3**).

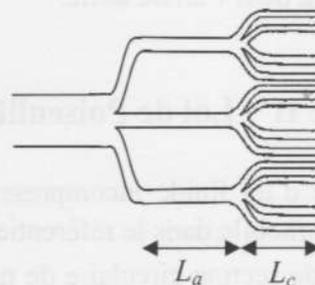


Figure 3 – Modélisation du système circulatoire artériel

En considérant alors un écoulement laminaire du sang, de viscosité η , qui se traduit par la loi de Poiseuille, l'expression de la résistance hydraulique de l'ensemble du système, que l'on retrouvera

en **partie II**, vaut : $R_{tot} = \frac{8 \cdot \eta}{\pi} \cdot \left(\frac{L_a}{N_a \cdot r_a^4} + \frac{L_c}{N_c \cdot r_c^4} \right)$. Par ailleurs, si on admet que le corps se construit

en limitant la résistance hydraulique totale, on peut alors justifier qualitativement la loi de Murray théorique, qui traduit la loi de dépendance entre N_a , r_a , N_c et r_c . (**partie III**).

Pour une compréhension et une modélisation plus raffinées de la circulation sanguine dans les vaisseaux, il faut garder à l'esprit plusieurs caractéristiques du système vasculaire, qui le différencient d'un réseau d'adduction d'eau, par exemple :

- il est alimenté par une source pulsée : le cœur n'injecte du sang dans l'aorte que lors de la contraction du ventricule gauche ;
- les vaisseaux sanguins ne sont pas des tuyaux rigides : les tissus qui les constituent possèdent une certaine élasticité ;
- le sang n'est pas un liquide newtonien tel que l'eau. Son caractère non newtonien se traduit par exemple par le fait que sa viscosité dépend du diamètre du vaisseau dans lequel il s'écoule.

En s'appuyant sur les éléments donnés lors de l'introduction du problème 1, nous établirons dans la **partie I** certains résultats généraux de la circulation sanguine. La **partie II** nous conduira à justifier l'expression de la résistance hydraulique de l'ensemble du système vasculaire et la **partie III** nous permettra de comparer les lois de Murray théorique et expérimentale. Dans la **partie IV**, nous étudierons le rôle de l'élasticité des vaisseaux et la **partie V** traitera de la mesure de la vitesse de circulation du sang par effet Doppler. Ces cinq parties sont indépendantes.

Partie I – Généralités

- Q1.** Calculer le volume de sang qui circule chaque minute dans le système vasculaire. Vérifier qu'il correspond, environ, aux cinq litres de sang contenus dans le corps d'un adulte.
- Q2.** En considérant que le côté droit du cœur développe une puissance mécanique de 0,2 Watt, vérifier que la puissance mécanique massique totale du cœur est de $5 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$. On pourra notamment s'appuyer sur une analyse dimensionnelle.
- Q3.** En physiologie, on estime qu'environ 10 % de l'énergie reçue par un muscle est convertie en travail mécanique. À quoi peuvent correspondre les 90 % restants ?
- Q4.** Préciser la relation reliant le nombre de vaisseaux N à leur rayon a . Cette relation correspond à la loi expérimentale de Murray.
- Q5.** Estimer la vitesse moyenne du sang dans l'artère aorte.

Partie II – Loi de Poiseuille

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité η dans un tuyau cylindrique immobile dans le référentiel d'étude galiléen, centré sur l'axe horizontal (Ax) de vecteur unitaire \vec{e}_x , de section circulaire de rayon a et de longueur L (**figure 4**, page suivante). Nous sommes alors en présence d'un écoulement de Poiseuille cylindrique. La pression à l'entrée du tube est $P(x=0) = P_A$ et $P(x=L) = P_B$ à la sortie. Le champ des vitesses est

de la forme $\vec{v}(M) = v(r) \cdot \vec{e}_x$. Par ailleurs, un élément de fluide limité par une partie du cylindre d'axe (Ax) et de rayon r , de surface latérale $\Sigma(r)$, est soumis de la part du fluide situé entre les rayons r et a à la force de viscosité $\vec{F} = \eta \cdot \frac{dv(r)}{dr} \cdot \Sigma(r) \cdot \vec{e}_x$. On négligera les effets de la pesanteur.

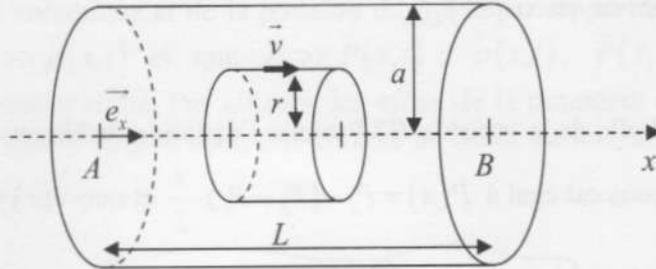


Figure 4 – Loi de Poiseuille pour un tube de section circulaire

- Q6. Pourquoi choisit-on des pressions en entrée et en sortie différentes pour décrire cet écoulement ?
- Q7. L'équation locale de la dynamique, ou équation de Navier-Stokes, pour les fluides incompressibles est : $\rho \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \cdot (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{f}_{\text{vol}} - \text{grad}P + \eta \cdot \Delta \vec{v}$.
Donner la signification des différents termes de cette équation.
- Q8. À quelle condition l'écoulement peut-il être considéré comme laminaire ? Tester cette condition pour l'écoulement dans l'artère aorte en considérant une viscosité dynamique de 10^{-3} Pa.s et une masse volumique du sang de 10^3 kg.m⁻³. Commenter.
- Q9. D'après les premiers éléments descriptifs de l'écoulement de Poiseuille cylindrique, simplifier l'équation de Navier-Stokes.

Pour définir la loi d'évolution $v(r)$, il faut préciser le terme $\eta \cdot \Delta \vec{v}$. Pour cela, il nous faut retrouver la densité volumique des forces de viscosité en calculant la résultante des forces de viscosité s'exerçant sur une particule de fluide possédant la forme décrite en figure 5.

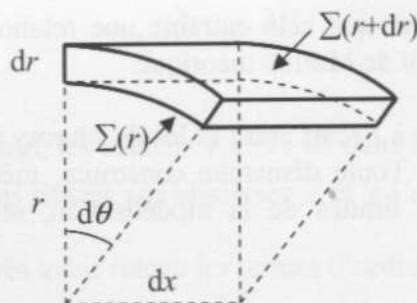


Figure 5 – Particule de fluide en géométrie cylindrique

Q10. Déterminer les expressions de la force de viscosité \overrightarrow{dF}_+ appliquée sur la face supérieure de surface latérale $\Sigma(r+dr)$ et de la force de viscosité \overrightarrow{dF}_- appliquée sur la face inférieure de surface latérale $\Sigma(r)$. Montrer que la résultante des forces de viscosité qui s'exercent sur la particule de fluide est donc : $\overrightarrow{dF}_{visc} = \eta \cdot \left(\frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dv}{dr} \right) \right) \cdot d\theta \cdot dx \cdot dr \cdot \overrightarrow{e}_x$. En déduire la densité volumique des forces de viscosité $\overrightarrow{f}_{v,visc}$.

Q11. La pression dépend-elle de la variable θ ? Projeter l'équation de Navier-Stokes et montrer que le champ des pressions est égal à $P(x) = P_A - (P_A - P_B) \cdot \frac{x}{L}$ et que $v(r) = \frac{(P_A - P_B)}{4 \cdot \eta \cdot L} \cdot (a^2 - r^2)$.

Q12. Donner l'expression du débit volumique D_v de cet écoulement. En expliquant l'analogie avec la résistance électrique, montrer que la résistance hydraulique du tuyau vaut : $R_H = \frac{8 \cdot \eta \cdot L}{\pi \cdot a^4}$.

Q13. Justifier l'expression de la résistance hydraulique de l'ensemble du système vasculaire R_{tot} .

Partie III – Loi de Murray

On suppose que l'organisme dispose d'un volume V_0 donné de tissus pour réaliser les parois du système vasculaire et que l'épaisseur e d'un vaisseau est proportionnelle à son rayon extérieur r : $e = \alpha \cdot r$ avec $\alpha \ll 1$.

Q14. Exprimer V_0 en fonction de $N_a, L_a, r_a, N_c, L_c, r_c$ et α . En exprimant que le système circulatoire se construit en utilisant une quantité minimale et donc un volume V_0 minimal de tissus, déterminer $\frac{dr_c}{dr_a}$ en fonction de $N_a, L_a, r_a, N_c, L_c, r_c$.

Q15. Le corps se construit aussi de façon à minimiser la résistance hydraulique totale R_{tot} du système circulatoire. Montrer que cela entraîne une relation entre N_a, r_a, N_c, r_c que l'on identifiera comme étant la loi de Murray théorique.

Q16. Proposer des interprétations à l'écart entre la loi de Murray théorique et la loi expérimentale obtenue à la question **Q4**. Toute démarche construite, même inachevée, développant une réflexion physique sur les limites de la modélisation, sera prise en considération dans l'évaluation.

- 1) 80 cm^3 sang à chaque battement] énoncé
 • 1 battement chaque seconde

Donc $V_{\text{sang}}/\text{minut} = 80 \times 60 = 4800 \text{ cm}^3/\text{minute} = 4,8 \text{ L}/\text{min}$

Cela correspond à presque 5L ce qui est le contenu du corps en sang.
 Donc en une minute, tout le sang est passé par le coeur.

- 2) Énoncé : "le côté droit a une puissance de $0,2 \text{ W}$ "
 "le côté gauche injecte 80 cm^3 à la pression 16 kPa "
 à chaque battement
 "1 battement dure 1 s "

$$|\Delta W| = p \Delta V = 16 \times 10^3 \times 80 \times 10^{-6} = 1,28 \text{ J}$$

$$P_{\text{gauche}} = \frac{|\Delta W|}{\Delta t_{\text{batt}}} = 1,28 \text{ W}$$

D'où $P_{\text{droit}} + P_{\text{gauche}} = 0,2 + 1,28 \text{ W} = 1,48 \text{ W}$

d'où $P_{\text{Total, massique}} = \frac{P_{\text{droit}} + P_{\text{gauche}}}{M_{\text{coeur}}} = \frac{1,48}{0,3} = 5 \text{ W/kg (OK)}$

- 3) Les 90% restants alimentent le muscle, permettent le maintien en t° du corps.

4) Fig 2 $\rightarrow \log N = A \log a + 10$ avec $A = -\frac{10}{3,7}$

$$\rightarrow N = 10^{10} a^{-2,7} = 10^{10} a^{-2,7} \text{ où } a \text{ en } \mu\text{m}$$

- 5) Le sang est expulsé par l'artère aorte à raison de $80 \text{ cm}^3/\text{s}$
 L'artère aorte a un diamètre $2a = 10 \text{ mm}$ et il y en a 1.

on a donc débit volumique = $D_v = 80 \text{ cm}^3/\text{s}$

Or $D_v = v \pi a^2$

$$\Rightarrow v = \frac{D_v}{\pi a^2}$$

AN: $v = \frac{80}{\pi \times 0,5^2} = 100 \text{ cm/s} = 1 \text{ m/s}$

6) C'est le fonctionnement du coeur qui par ses battements donne des variations de pression dans les vaisseaux

7) $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$: terme lié à l'accélération locale

$\rho(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}$: terme lié à l'accélération convective

$-\text{grad} p$: force volumique de pression

$\eta \Delta \vec{v}$: force volumique de viscosité

\vec{f}_{vol} : autre type de force volumique

8) Écoulement laminaire si $Re \ll 1$ (ou 2000 selon les auteurs)

Nombre de Reynolds

$Re = \frac{\rho L v}{\eta}$ ici la longueur caractéristique est le diamètre $2a$ (ou le rayon a)

$$Re = \frac{\rho a v}{\eta} = \frac{10^3 \cdot 10^{-2} \cdot 1}{10^{-3}} \sim 10^4 \gg 1$$

L'écoulement du sang dans l'aorte n'est pas laminaire

9) A grand nombre de Reynolds, le terme convectif l'emporte sur celui de la viscosité MAIS il s'agit qd-m de Poiseuille

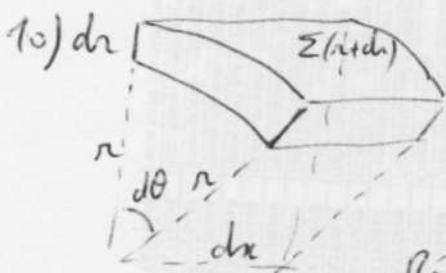
d'où $\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} \right) - \text{grad} p + \eta \Delta \vec{v}$ ← à garder

Énoncé "écoulement stationnaire" $\rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

" $v(r) \vec{e}_x$ " et "incompressible" } $\Rightarrow D_r$ constant ou $\text{div} \vec{v} = 0$
 - "section constante"

$$(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} = v \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Il reste $\vec{0} = -\text{grad} p + \eta \Delta \vec{v}$ (\vec{f}_{vol} perantem négligée)



$$d\vec{F}_+ = \eta \left(\frac{dv}{dr} \right)_{r+dr} \Sigma(r+dr) \cdot \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad \Sigma(r+dr) = dx (r+dr) d\theta$$

$$d\vec{F}_- = -\eta \left(\frac{dv}{dr} \right)_r \Sigma(r) \cdot \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad \Sigma(r) = dx r d\theta$$

Résultante $d\vec{F}_{\text{visc}} = d\vec{F}_+ + d\vec{F}_- = \eta \left[\left(\frac{dv}{dr} \right)_{r+dr} (r+dr) - \left(\frac{dv}{dr} \right)_r \right] dx d\theta \vec{e}_x$

d'où $d\vec{F}_{\text{visc}} = \eta \left(\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \right) dr dx d\theta \vec{e}_x$ (OK)

Le volume considéré fait $dr r d\theta dx$ d'où $\vec{F}_{\text{visc}} = \eta \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \vec{e}_x$

11) Par symétrie de révolution cylindrique, la pression ne dépend pas de θ .

Projection de Navier-Stokes sur \vec{e}_x : $0 = -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{dv}{dr})$
($\eta \Delta \vec{v} = \vec{f}_{\text{visc}}$) $(\vec{v} \parallel \vec{e}_x)$

d'où $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dv}{dr})$

Si on projette selon \vec{e}_r : $0 = -\frac{\partial f}{\partial r} + 0$ ($\vec{v} \parallel \vec{e}_x$)

donc f ne dépend pas de r
Finalement f dépend uniquement de x
on v dépend uniquement de r

l'égalité $\frac{df}{dx} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dv}{dr})$ implique que $\frac{df}{dx} = C_1 = C$
fonction de x fonction de r

d'où $f = Cx + D$

Avec les conditions limites données f_A en $x=0$ et f_B en L

on trouve $f = f_A - (f_A - f_B) \frac{x}{L}$ (OK)

Du coup $C = -\frac{f_A - f_B}{L}$ et $\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dv}{dr}) = C$ s'intègre en :

$r \frac{dv}{dr} = \frac{C}{\eta} r^2$ (pas de constante ici car par $r=0$ ça marche sachant que $\frac{dv}{dr} \neq \infty$)

soit $\frac{dv}{dr} = \frac{Cr}{2\eta}$

Intégrer $v = \frac{C}{4\eta} r^2 + D$ avec condition aux limites (par viscosité) $v=0$ en $r=a$

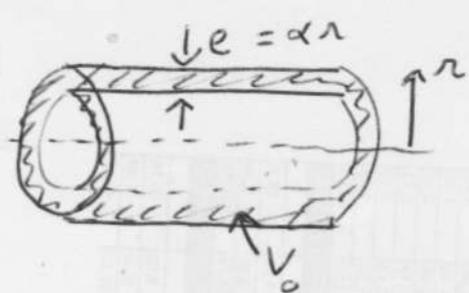
d'où $v = \frac{C}{4\eta} (r^2 - a^2) \Rightarrow v = \frac{f_A - f_B}{4\eta L} (a^2 - r^2)$ (OK)

12) $D_v = \int_a^0 v 2\pi r dr = \frac{(f_A - f_B) 2\pi}{4\eta L} [a^2 \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4}] = \frac{(f_A - f_B) a^4 \cdot 2\pi}{16\eta L}$

Elec : $V_A - V_B = RI$ ici $f_A - f_B = R_H \cdot D_v$ d'où $R_H = \frac{8\eta L}{\pi a^4}$ (OK)

13) Enoncé : " $R_{\text{tot}} = \frac{8\eta}{\pi} (\frac{L_a}{N_a n_c^4} + \frac{L_c}{N_c n_c^4})$ " : les résistances s'ajoutent car elles sont parcourues par le même débit l'équivalent de l'intensité en elec, donc en série.

14)



$$V_0 = \alpha [r_a^2 N_a L_a + r_c^2 N_c L_c] \times 2\pi$$

(4)

Enoncé: V_0 minimal $\Rightarrow dV_0 = 0$

$$\Rightarrow r_a dr_a N_a L_a + r_c dr_c N_c L_c = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dr_c}{dr_a} = -\frac{r_a N_a L_a}{r_c N_c L_c}}$$

15) Enoncé $R_{Tot} = \frac{8\eta}{\pi} \left[\frac{L_a}{N_a r_a^4} + \frac{L_c}{N_c r_c^4} \right]$ et R_{Tot} minimale $\Rightarrow dR_{Tot} = 0$

Toujours à L_a, L_c, N_a, N_c constants, $-\frac{4 dr_a}{r_a^5} \frac{L_a}{N_a} - \frac{4 dr_c}{r_c^5} \frac{L_c}{N_c} = 0$

$$\text{d'où } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dr_c}{dr_a} = - \frac{L_a}{L_c} \frac{N_c}{N_a} \frac{r_c^5}{r_a^5} \end{array} \right.$$

Combiné avec 14) $\frac{L_a}{L_c} \frac{N_c}{N_a} \frac{r_c^5}{r_a^5} = \frac{N_a L_a r_a}{N_c L_c r_c} \rightarrow \boxed{\left(\frac{N_c}{N_a}\right) \left(\frac{r_c}{r_a}\right)^3 = 1}$

16) La loi de Murray du 4) s'écrit $N = 10^{10} r^{-2.7}$

ce qui correspond à un écart (petit) à la loi de Murray du 15) étant donné que $3 \approx 2.7$

Le petit écart pourrait être dû aux hypothèses simplificatrices du modèle théorique :

- le fait d'avoir négligé la pesanteur
- l'élasticité des vaisseaux
- de ne pas avoir tenu compte du caractère non Newtonien
- du caractère non laminaire ($Re \gg 1$)

le rayon est le même pour tout