X PC 07

I. Principe du mouvement « collé-glissé »

Une poutre rigide et homogène, de longueur L, de masse m et de section carrée s, est posée en équilibre à l'horizontale sur deux supports (numérotés 1 et 2) séparés de la distance D_0 (Figure 1). Les coefficients de frottement solide statique et cinétique entre cette poutre et chacun des supports sont respectivement μ_S et μ_C, avec $\mu_S > \mu_C$. Le centre de gravité G de la poutre se trouve initialement à la distance horizontale a_0 du support 1, avec $a_0 < D_0/2$.

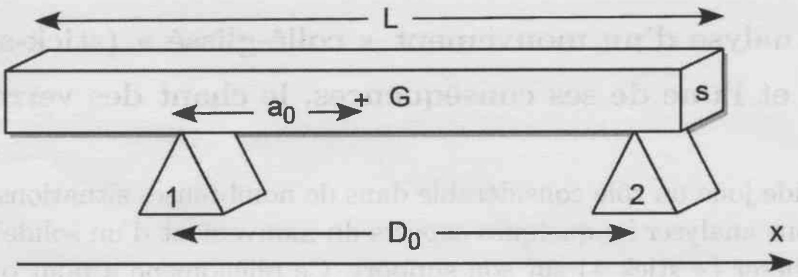

Figure 1

I.1. La poutre est immobile. Calculer les forces de réaction verticales des supports sur la poutre, R_{N1} et R_{N2}, en fonction des données du problème.

I.2. Les supports 1 et 2 sont maintenant animés l'un vers l'autre de vitesses horizontales et constantes, respectivement $v_0/2$ et $-v_0/2$ selon Ox. La poutre ne peut se déplacer qu'en translation horizontale selon cette même direction. La distance entre les deux supports s'écrit donc : $D(t) = D_0 - v_0 t$.

Que deviennent les forces $R_{N1}(t)$ et $R_{N2}(t)$ en fonction de $a(t)$, distance horizontale entre le centre de gravité G de la poutre et le support 1 à l'instant t ?

I.3. On suppose que la poutre glisse d'abord par rapport à un seul des deux supports. Préciser lequel ; déterminer les forces horizontales de frottement, d'intensités $F_1(t)$ et $F_2(t)$, qui agissent sur la poutre lors de cette phase du mouvement.

I.4. Montrer que ce mouvement ne peut se perpétuer, et qu'il existe un instant t_1 où la poutre se met à glisser sur l'autre support. Déterminer la distance $D_1 = D(t_1)$ en fonction de a_0, μ_S et μ_C.

I.5. Justifier qu'il existe alors une phase du mouvement où nécessairement il y a glissement sur les deux supports. Exprimer alors la somme des forces de frottement en fonction de $a(t)$, $D(t)$ et des constantes du problème. Dans quel sens agit-elle ? Donner le critère qui détermine la fin de cette seconde phase en précisant le support sur lequel le glissement cesse. Soit t'_1 l'instant correspondant. (On ne demande pas de l'exprimer).

I.6. Décrire la phase suivante du mouvement. Elle se termine à l'instant t_2. Montrer que $D(t_2) = \left(1 + \dfrac{\mu_C}{\mu_S}\right)[D(t_1') - a(t_1')]$.

I.7. On admettra que, pour une faible vitesse de rapprochement des supports et une distance a_0 suffisamment grande, les modifications de $D(t)$ et de $a(t)$ durant la phase transitoire (cf. I-5) restent faibles en valeur relative. En les négligeant, montrer que $D(t_2) \simeq \dfrac{\mu_C}{\mu_S} D(t_1)$. En déduire un moyen simple d'évaluer le rapport μ_C / μ_S.

II. Analyse d'un mouvement d'oscillation. Masse sur un tapis roulant

Dans cette partie, on considère le mouvement d'une masse m posée sur un tapis roulant se déplaçant à une vitesse horizontale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, $v_0 > 0$, par rapport au référentiel du laboratoire. La masse est soumise à une force de rappel colinéaire au mouvement du tapis roulant et exercée par un ressort de raideur k. Les coefficients de frottement statique et cinétique entre la masse et le tapis sont notés respectivement μ_S et μ_C. On repérera la position de la masse par son abscisse x dans le référentiel du laboratoire, l'origine correspondant à l'absence de déformation du ressort.

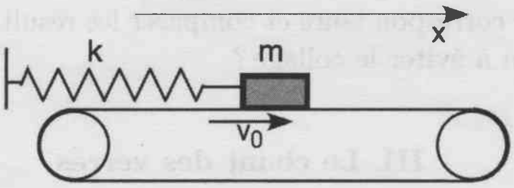

Figure 2

II.1. Montrer qu'il existe une position d'équilibre dont on déterminera l'abscisse x_{eq} en fonction de μ_C, g et $\omega^2 = k/m$.

II.2. On pose $X = x - x_{eq}$. Expliciter l'équation du mouvement de la masse ; on distinguera les situations $\dot{X} < v_0$ et $\dot{X} > v_0$.

Montrer qu'une phase de mouvement avec collage, pour laquelle $\dot{X} = v_0$, peut s'établir si X appartient à l'intervalle $[X_1, X_2]$ dont on déterminera les bornes.

II.3. La masse est posée sur le tapis sans vitesse initiale à l'abscisse X_0, avec $X_0 > X_2$ Déterminer $X(t)$ pour le début du mouvement. Montrer que ce type de mouvement se maintient si X_0 est inférieur à une valeur X_m que l'on déterminera.

II.4. On utilise X_m comme longueur caractéristique. On pose $q_{eq} = x_{eq}/X_m$, $q_1 = X_1/X_m$ et $q_2 = X_2/X_m$. Exprimer q_1 et q_2 en fonction de q_{eq} et du rapport $\gamma = \mu_S/\mu_C$.

II.5. On pose $q(\theta) = X/X_m$ avec $\theta = \omega t$. Exprimer $q' \hat{=} \dfrac{dq}{d\theta}$ en fonction de $\dot{X}$ et v_0. Transcrire pour $q(\theta)$ les équations différentielles du mouvement obtenues en **II.2.** Dans le plan $(q; q')$ tracer le portrait de phase correspondant au mouvement de conditions initiales (0,5 ; 0). Quel est alors le mouvement ?

I1) • Projection verticale du TCI appliqué à la poutre

$$mg = R_{N_1} + R_{N_2}$$

• TMC / G pour la poutre : $R_{N_1} a_0 = R_{N_2} (D_0 - a_0)$

$\rightarrow$ $\boxed{R_{N_1} = mg\left(1 - \frac{a_0}{D_0}\right)}$ $\boxed{R_{N_2} = mg\frac{a_0}{D_0}}$

I2) TCI et TMC/G toujours valables

$\rightarrow$ $\boxed{R_{N_1}(t) = mg\left(1 - \frac{a(t)}{D(t)}\right)}$ $\boxed{R_{N_2}(t) = mg\frac{a(t)}{D(t)}}$

I3) La réaction normale la plus faible est celle du support le plus éloigné, càd n° 2. C'est donc de ce côté que la condition de glissement va se vérifier par $R_t = \mu_c R_N$ en premier. <u>La poutre va donc glisser d'abord sur le support 2 (le + éloigné de G)</u>

Ainsi $F_2(t) = -\mu_c R_{N_2}$ le signe − est dû au fait que F_2 est opposée à la vitesse de glissement de la poutre sur le support, donc dans le même sens que la vitesse du support par rapport à la poutre, càd $-\vec{e}_x$.

donc $\boxed{F_2(t) = -\mu_c mg \frac{a(t)}{D(t)} = -\mu_c mg\frac{a_0}{D(t)}}$ car

Si la poutre glisse seulement sur 1 support c'est que G reste à la même distance a_0 du support 1. Celui-ci va à $\frac{v_0}{2}$ constante. Ainsi donc G va aussi à $\frac{v_0}{2}$ constante. Ainsi son accélération reste nulle et le TCI appliqué à la poutre et projeté horizontalement donne $F_1(t) + F_2(t) = 0$ d'où $\boxed{F_1(t) = \mu_c mg\frac{a_0}{D(t)}}$

I4) • $D(t)$ ne peut que diminuer donc $F_1(t) \nearrow$ jusqu'à atteindre $\mu_s R_{N_1}$. En effet

$$\frac{F_1(t)}{R_{N_1}(t)} = \frac{\mu_c mg\, a_0/D(t)}{mg\frac{D(t)-a_0}{D(t)}} = \frac{\mu_c a_0}{D(t)-a_0} \nearrow \text{ si } D(t)\searrow$$

Qd $\frac{\mu_c a_0}{D(t)-a_0}$ atteint μ_s la poutre peut glisser sur le support 1.

• A t_1 $F_1(t_1) = \mu_s R_{N_1}(t_1)$ donc $\frac{\mu_c a_0}{D_1 - a_0} = \mu_s$

soit $\boxed{D_1 = a_0\left(1 + \frac{\mu_c}{\mu_s}\right)}$

I5) A partir du moment où $F_1 = \mu_s R_{N_1}$ et comme $R_{N_2} < R_{N_1}$ F_2 atteint plus facilement la limite $\mu_s R_{N_2}$ correspondant au glissement.

• Cette fois G peut avoir une accélération

TCI à la poutre : $F_1 + F_2 = m\ddot{a}$

soit avec $F_1 = \mu_c R_{N_1} = \mu_c mg\frac{D(t)-a(t)}{D(t)}$

$$F_2 = -\mu_c R_{N_2} = -\mu_c mg\frac{a(t)}{D(t)}$$

$\rightarrow \mu_c mg\frac{D(t)-2a(t)}{D(t)} = m\ddot{a} \rightarrow \boxed{\ddot{a} = \mu_c\frac{D(t)-2a(t)}{D(t)}}$

Rq : $\boxed{F_1 + F_2 = \mu_c mg\frac{D(t)-2a(t)}{D(t)}}$ Comme à t_1 on a $a(t_1) = a_0$ et $D(t_1) = D_1$

on remarque que $\frac{D(t_1)-2a(t_1)}{D(t_1)} = \frac{a_0}{D_1}\left(1 + \frac{\mu_c}{\mu_s} - 2\right)$

càd que $F_1 + F_2$ est proportionnelle à $\left(\frac{\mu_c}{\mu_s} - 1\right) < 0$

<u>A t_1</u> $\ddot{a}(t_1) < 0$ <u>$F_1 + F_2$ agit vers $-\vec{e}_x$</u>

Il y aura donc un instant t'_1 correspondant à la poutre ayant la même vitesse (vers la gauche) que le support 2 càd $-\frac{v_0}{2}$.

<u>Le glissement cesse sur le support 2 à t'_1</u>

I6) Les rôles des supports sont inversés par rapport à I4 et la distance entre G et le support 2 qui ne glisse pas de t'_1 à t_2 est $D(t'_1) - a(t'_1)$ à l'instant initial t'_1 de cette phase de mouvement (où le support 2 ne glisse plus)

On reprend donc la formule du I4) en remplaçant a_0 par $D(t'_1) - a(t'_1)$ d'où

$$\boxed{D(t_2) = \left(D(t'_1) - a(t'_1)\right)\left(1 + \frac{\mu_c}{\mu_s}\right)}$$

I7). D'après l'énoncé, $D(t'_1) \simeq D(t_1)$ puisque on néglige la durée où les 2 supports glissent sous la poutre.

. L'énoncé suggère $a(t'_1) \simeq a_0$ car a_c très grande

d'où $D(t_2) = \left(D(t_1) - a_0\right)\left(1 + \frac{\mu_c}{\mu_s}\right)$

Comme $D(t_1) = D_1 = a_0\left(1 + \frac{\mu_c}{\mu_s}\right)$ on a

$$D(t_2) = a_0\frac{\mu_c}{\mu_s}\left(1 + \frac{\mu_c}{\mu_s}\right) = a_0\left(1 + \frac{\mu_c}{\mu_s}\right)\frac{\mu_c}{\mu_s} = D_1\frac{\mu_c}{\mu_s}$$

$$\boxed{D(t_2) = \frac{\mu_c}{\mu_s} D(t_1)}$$

on peut donc en notant les 2 distances pour lesquelles le double glissement s'amorce obtenir $\frac{\mu_c}{\mu_s}$

II 1) m est soumise à la force de frottement du tapis avec μ_c car glissement, et à la tension du ressort (déformation supposée nulle à $x=0$) donc $\mu_c mg = kx_{eq} \rightarrow \boxed{x_{eq} = \frac{\mu_c g}{\omega^2}}$

II 2) . $\dot{X} < v_0$ càd $\dot{x} < v_0$ alors $v_{g\, m/tapis} < 0$ et

$F = +\mu_c mg$: $\mu_c mg - kx = m\ddot{x}$ pour $\dot{X} < v_0$

$-\mu_c mg - kx = m\ddot{x}$ pour $\dot{X} > v_0$

. on aura ;

. remplacer $\ddot{x} = \ddot{X}$ et $x = X + x_{eq}$ donne :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \ddot{X} + \omega^2 X = 0 & \text{pour } \dot{X} < v_0 \\ \ddot{X} + \omega^2 X = -2\omega^2 x_{eq} & \text{pour } \dot{X} > v_0 \end{array}}$$

. ⚠ une phase avec collage ne correspond pas aux équations ci-dessus valables uniquement en cas de glissement, avec μ_c.

$$\text{Collage} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} |F| \leq \mu_s mg \\ F - kx = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow k|x| \leq \mu_s mg$$

ou $|x| \leq \mu_s \frac{g}{\omega^2}$

soit $\pm x \leq \mu_s \frac{g}{\omega^2}$

$x = X + x_{eq} \longrightarrow -(\mu_s + \mu_c)\frac{g}{\omega^2} \leq X \leq (\mu_s - \mu_c)\frac{g}{\omega^2}$

$\longrightarrow \boxed{X_1 = -\left(1 + \frac{\mu_s}{\mu_c}\right) x_{eq}}$ $\boxed{X_2 = \left(\frac{\mu_s}{\mu_c} - 1\right) x_{eq}}$

II 3) $X > X_2$ donc le mouvement débute par un glissement, nécessairement négatif, avec $\dot{X} < v_0$ donc $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ soit $\boxed{X = X_0 \cos\omega t}$

Le mouvement se maintient tant que $\dot{X} < v_0$

càd $-\omega X_0 \sin\omega t < v_0 \quad \forall t$

donc $\omega X_0 < v_0$ $\boxed{X_0 < X_m}$ avec $\boxed{X_m = \frac{v_0}{\omega}}$

II 4) $\left| \begin{array}{l} q_1 \stackrel{\vee}{=} \frac{X_1}{X_m} = -\left(1 + \frac{\mu_s}{\mu_c}\right)\frac{x_{eq}}{X_m} = -\left(1 + \frac{\mu_s}{\mu_c}\right) q_{eq} \\ q_{eq} \stackrel{\vee}{=} \frac{x_{eq}}{X_m} \end{array} \right.$

De même $q_2 = \left(\frac{\mu_s}{\mu_c} - 1\right) q_{eq}$

Donc $\boxed{q_1 = -(1+\gamma)\, q_{eq}}$ et $\boxed{q_2 = (\gamma - 1)\, q_{eq}}$

II 5) $\frac{dq}{d\theta} = \frac{dq}{dt}\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{X_m}\frac{\dot{X}}{\dot{\theta}} = \frac{1}{X_m}\frac{\dot{X}}{\omega} = \frac{\dot{X}}{v_0}$

donc $\boxed{q' = \frac{\dot{X}}{v_0}}$

$\dot{X} = v_0 q' \Rightarrow \ddot{X} = v_0 q'' \dot{\theta} = v_0 q'' \omega$

$\ddot{X} = \omega^2 X_m q''$

donc les équations du II 2) se transforment en :

$\omega^2 X_m q'' + \omega^2 X_m q = 0$ pour $\dot{X} < v_0$

soit $q'' + q = 0$

Résumé : $\boxed{\begin{array}{ll} q'' + q = 0 & \text{pour } \dot{X} < v_0 \\ q'' + q = -2q_{eq} & \text{pour } \dot{X} > v_0 \end{array}}$

$q_0 = 0{,}5 \Rightarrow X_0 = 0{,}5\, X_m < X_m$ correspond au II 3) soit $\boxed{q = 0{,}5\cos\theta}$

$\boxed{q' = -0{,}5\sin\theta}$

d'où un cercle comme portrait de phase