PARTIE C - THERMODYNAMIQUE DU RAYONNEMENT SOLAIRE

La surface externe du Soleil est assimilée à un corps noir sphérique, de rayon $r_S = 6{,}96 \times 10^8$ m, maintenu à la température $T_s = 5\,800$ K et situé à la distance $a = 1{,}50 \times 10^8$ km de la Terre. On adopte les valeurs numériques suivantes (la valeur adoptée de la célérité de la lumière dans le vide est toujours $c = 3{,}00 \times 10^8$ m.s^{-1}) :
constante de Planck $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ J.s constante de Boltzmann $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1}

Dans tout le problème, le milieu de propagation des ondes électromagnétiques est assimilé au vide.

La puissance P rayonnée par l'unité de surface d'un corps noir est répartie sur l'ensemble des longueurs d'onde λ possibles, avec, pour répartition selon la fréquence ν, ou selon la longueur d'onde λ, la *loi de Planck* :

$$\frac{dP_u}{d\nu} = C^{te}\, T^3 g(u) \quad \text{où} \quad g(u) = \frac{u^3}{e^u - 1} \quad \text{et} \quad u = \frac{h\nu}{k_B T}. \text{ La fonction } g(u) \text{ vérifie } \int_{u=0}^{+\infty} g(u)\,du = \frac{\pi^4}{15}.$$

On pose aussi $\frac{dP_u}{d\lambda} = h(u)$.

C.I - ÉTUDE GÉNÉRALE DU RAYONNEMENT THERMIQUE SOLAIRE

23. La constante C^{te} de la loi de Planck n'étant fonction que des constantes universelles h, c et k_B, sous la forme :

$$\kappa\left(c^{\alpha}\right)\left(h^{\beta}\right)\left(k_B^{\gamma}\right) = C^{te}$$

où κ, α, β et γ sont des constantes sans dimension, déterminer les valeurs de α, β et γ.

L'étude *expérimentale* du rayonnement du corps noir porté à la température T montre que la puissance rayonnée par l'unité de surface de ce dernier, sommée pour toutes les fréquences, est donnée par la loi de Stefan : $P = \sigma T^4$ où $\sigma = 5{,}69 \times 10^{-8}$ W.m^{-2}.K^{-4}.

24. Déterminer la valeur numérique de la constante sans dimension κ. Sachant que la valeur théorique est $\kappa = 2\pi$, commenter la précision de la mesure.

25. Déterminer la fonction $h(u)$. On admettra dans la suite que cette fonction présente, en fonction de u, un maximum unique atteint pour la valeur $u_m = 4{,}97$.

26. Établir la *loi de déplacement de Wien*, liant la longueur d'onde λ_m du maximum d'émission thermique d'un corps noir, à la température T à laquelle celui-ci est chauffé. Application numérique : comparer les valeurs de la longueur d'onde λ_m pour le rayonnement thermique de l'ensemble de l'atmosphère terrestre en été (assimilée à un corps noir à la température de 20°C) et pour le rayonnement thermique solaire. Votre résultat est-il conforme à la couleur apparente du Soleil ? Discuter votre réponse, quelle qu'elle soit.

27. Calculer la valeur numérique de la puissance rayonnée par le Soleil, par unité de surface au niveau du sommet de l'atmosphère terrestre, ϕ^0_s (on ne tient pas compte de l'obliquité, la surface considérée est normale au rayonnement); comparer cette valeur à la puissance effectivement reçue au niveau du sol, qui est en moyenne de l'ordre de $\phi_s = 700$ W.m^{-2}. Commenter.

28. Un satellite *GPS* situé en haute atmosphère, passe deux fois par jour, de la nuit (pendant laquelle le rayonnement est négligeable) au plein soleil. En admettant qu'il atteigne à chaque fois l'équilibre thermique, et qu'il se comporte, en émission comme en absorption, comme un corps noir, estimer dans chaque cas sa température d'équilibre ; commenter ce résultat et les conditions de son obtention (influence de la forme du satellite, de sa position...)

Mines-Ponts 97 MP Rayonnement

23) $\frac{dP_\nu}{d\nu} = C^{te}\, T^3 g(u)$ où $g(u) = \frac{u^3}{e^u - 1}$ et $u = \frac{h\nu}{k_B T}$

$E \approx h\nu \sim k_B T \Rightarrow u \sim$ nombre $\Rightarrow g(u) \sim$ nombre

$C^{te} \sim \frac{E}{S \times t} \times t \times \frac{1}{T^3} \sim \frac{E}{S \times T^3}$

or $E \sim h\nu \rightarrow \nu \sim \frac{E}{h}$

$E \sim k_B T \qquad T \sim \frac{E}{k_B}$

$E \sim \frac{hc}{\lambda} \qquad \lambda \sim \frac{hc}{E} \Rightarrow S \sim \frac{h^2 c^2}{E^2}$

$\Rightarrow C^{te} \sim \frac{E^3 k_B^3}{h^2 c^2 E^3} \sim \frac{k_B^3}{h^2 c^2}$

$\boxed{C^{te} = K \frac{k_B^3}{h^2 c^2}}$

$\alpha = -2$
$\beta = -2$
$\gamma = 3$

24) $P = \int_\nu dP_\nu = \int C^{t} T^3 g(u)\, d\nu = \int_\nu K \frac{k_B^3}{h^2 c^2} T^3 g(u) \frac{k_B T}{h} du = K \frac{k_B^3}{h^2 c^2} \frac{k_B T^4}{h} \frac{\pi^4}{15}$

$= \sigma T^4$

$\sigma = K \frac{k_B^4}{h^3 c^2} \frac{\pi^4}{15} = 5{,}69 \cdot 10^{-8}$ ← valeur donnée ds texte

↓

$K = \frac{5{,}69 \cdot 10^{-8} \times h^3 c^2\, 15}{k_B^4 \times \pi^4} = \frac{5{,}69 \cdot 10^{-8} \times 6{,}62^3 \times 10^{-3\times 34} \times 9 \cdot 10^{16} \times 15}{1{,}38^4 \times 10^{-4\times 23} \times \pi^4}$

$\underline{K = 6{,}31}$ $\qquad K_{\text{théorique}} = 2\pi = 6{,}28 \qquad$ 0,4 % d'erreur

25) $\frac{dP_\nu}{d\lambda} = \frac{dP_\nu}{d\nu} \left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right|$

or $\nu = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}$ donc $d\nu = -c \frac{d\lambda}{\lambda^2}$ $\Rightarrow \frac{dP_\nu}{d\lambda} = \frac{dP_\nu}{d\nu} \times c \frac{1}{\lambda^2}$

$\rightarrow \frac{dP_\nu}{d\lambda} = C^{te} T^3 g(u)\, c \frac{1}{\lambda^2} = h(u)$ avec $\boxed{u = \frac{h\nu}{k_B T}}$ soit $\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{u\, k_B T}{hc}$

$\frac{dP_\nu}{d\lambda} = \boxed{h(u) = C^{te}\, T^3 g(u)\, c\, u^2 \frac{k_B^2 T^2}{h^2 c^2} = C^{te} \frac{k_B^2 T^5 u^2 g(u)}{h^2 c}} = 2\pi \frac{k_B^5}{h^4 c^3} T^5 u^2 g(u)$

$\boxed{h(u) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^u - 1}}$

26) $\frac{dP_\nu}{d\lambda}$ max pour $u = u_m = 4{,}97$ (donné ds texte)

soit $\frac{h\nu}{k_B T} = 4{,}97$

$\nu = \frac{c}{\lambda}$

$\Rightarrow \frac{hc}{\lambda k_B T} = 4{,}97$ ou $\boxed{\lambda T = \frac{hc}{k_B \times 4{,}97}}$

A.N : $\lambda_{max}T = \dfrac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^{8}}{1,38 \times 10^{-23} \times 4,97} = \underline{2,90 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}}$

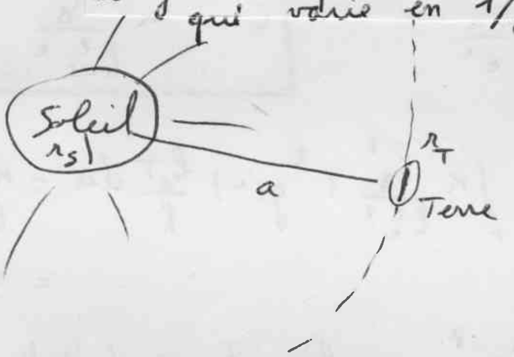
(loi de Wien)

atmosph. ($T_{terre} = 20°C = 293\,K$) $\Rightarrow \lambda_{max} = \dfrac{2,90 \cdot 10^{-3}}{293} \simeq 10\,\mu m$

(I.R.)

Soleil : $T_{terre} = 5800\,K \Rightarrow \lambda_{max} = \dfrac{2,90 \cdot 10^{-3}}{5800} = \underline{500\,nm}$ (vert)

On voit le Soleil jaune parce il n'y a pas que le vert d'émis (il s'agit du max d'émission dans le vert) et comme il y a le phénomène de diffusion par les molécules d'atmosphère qui varie en $1/\lambda^4$; $\lambda_{vert} < \lambda_{jaune}$: le vert est plus diffusé



Puissance totale émise par le Soleil

$\varphi P \times 4\pi r_S^2 \longleftrightarrow 4\pi a^2$

$x \longleftrightarrow \pi r_T^2$

Puissance reçue par la Terre

$$x = \frac{r_T^2}{4a^2} \times P \times 4\pi r_S^2$$

$\dfrac{x}{\pi r_T^2}$ = puissance reçue par la Terre par unité surface de la Terre $= \dfrac{P\, r_S^2}{a^2}$

$$\boxed{\text{puiss}^{ce} \text{ reçue par la Terre par unité surf. Terre} = \sigma T_S^4 \frac{r_S^2}{a^2}}$$

$$= \frac{5,69 \cdot 10^{-8} \times 5800^4 \times 6,96^2 \times 10^{16}}{1,5^2 \times 10^{2\times 11}}$$

$$= \underline{1386 \text{ W.m}^{-2}}$$

Perte dans l'atmosphère de la moitié de ce qui parvient au sommet.

$\Phi_S^0 \times \underbrace{\frac{1}{2} S}_{\text{moitié éclairée}} = \sigma S T_{sat}^4$ où S surface tot. du sat.

T_{sat} : t° du sat. (équilibre) lors de la phase éclairement

$\Rightarrow T_{sat}^4 = \dfrac{\Phi_S^0}{2\sigma} = \dfrac{1386}{2 \times 5,69 \cdot 10^{-8}}$ / $\underline{T_{sat} = 332\text{ K}} = 59\,°C$