Mines-Ponts PC 1 2015

1) $\vec{P}_{f_t} = m\vec{v}$ $\quad \vec{P}_{f_{t+dt}} = (m+dm)(\vec{v}+d\vec{v})$

$\vec{P}_{g_{t+dt}} = -dm\,\hat{u}_z(-u+v+dv)$

2) PFD à {fusée + gaz} $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F} = -mg\hat{u}_z$

$d\vec{P} = \vec{P}_{f_{t+dt}} + \vec{P}_{g_{t+dt}} - \vec{P}_{f_t}$

$dP = mv + mdv + vdm + dmdv + udm - vdm - dmdv - mv$

$dP = mdv + udm$

donc $m\frac{dv}{dt} + u\frac{dm}{dt} = -mg$ (1) $\Rightarrow \boxed{m\frac{dv}{dt} = D_m u - mg}$ (OK)

Avec $D_m = -\frac{dm}{dt}$

3) Tout se passe comme si la fusée considérée de masse constante m était soumise en plus de son poids, à une force de poussée

$\boxed{F = D_m u}$ $\quad$ Décollage si $F > m_0 g$ càd $D_m u > m_0 g$

4) $D_m u = mg$ avec $D_m = \frac{m}{T_1} \rightarrow \boxed{T_1 = \frac{u}{g}}$

5) $D_m = -\frac{dm}{dt} \rightarrow m = m_0 - D_m t$

(1) devient $dv = \left(\frac{D_m u}{m_0 - D_m t} - g\right)dt$

D_m = cste ; intégrons : (à $t=0$ $v=0$) $\boxed{v = -u\ln\left(\frac{m_0 - D_m t}{m_0}\right) - gt}$

6) $v_i = -u\ln\frac{m_i}{m_0}$ (g négligé)

$v_f = -u\ln\frac{m_f}{m_0}$

$\rightarrow \boxed{\Delta v = v_f - v_i = u\ln\frac{m_i}{m_f}}$

7) $\Delta v_{1^{er}\text{ étage}} = 4\ln\frac{134}{34} = 5{,}49$ km/h

$\Delta v_{2^e\text{ étage}} = 4\ln\frac{24}{4} = 7{,}17$ km/h

$\Delta v_{Total} = \Delta v_{1^{er}\text{ étage}} + \Delta v_{2^e\text{ étage}} = 12{,}7$ km/h

Si 1 seule fois $\Delta v_{1\text{ seule fois}} = 4\ln\frac{134}{14} = 9{,}04$ km/h

On a $\Delta v_{1\text{ seule fois}} \leq \Delta v_{\text{à 2 étages}}$

8) $\Delta v = +u\ln\frac{m_0}{m_u} \Rightarrow m_0 = m_u e^{\frac{\Delta v}{u}}$

$\rightarrow m_u + m_c = m_u e^{\frac{\Delta v}{u}}$

$\rightarrow \boxed{m_c = m_u\left(e^{\frac{\Delta v}{u}} - 1\right)}$

$m_{c_1} = 500\left(e^{\frac{5}{4}} - 1\right) = 1\,245$ kg $= 1{,}25$ tonnes

$m_{c_2} = 500\left(e^{\frac{5}{20}} - 1\right) \approx 0$!

On comprend qu'il faut - carburant ionique que chimique.

9) dm s'éjecte à la vitesse u/fusée

Ds $\mathcal{R}_{gal}$ $E_{c_{gaz}} = \frac{1}{2}|dm|(v-u)^2$

d'où $\boxed{P_{gaz} \overset{\text{déf}}{=} P_{jet} = \frac{E_{c_{gaz}}}{dt} = \frac{1}{2}D_m(v-u)^2}$

$\boxed{P_{force\ poussée} = Fv = D_m u v}$

(rq $P_{force\ poussée} = P_{cinétique\ gagnée\ par\ fusée} = \frac{\frac{1}{2}m(v+dv)^2 - \frac{1}{2}mv^2}{dt} = \frac{1}{2}m\,2v\frac{dv}{dt} = D_m u v$)

10) $\eta = \frac{P_{force\ poussée}}{P_{jet} + P_{force\ poussée}} = \frac{D_m u v}{\frac{1}{2}D_m(v-u)^2 + D_m u v}$

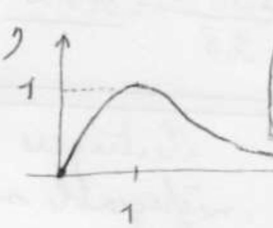
$\eta = \frac{2uv}{v^2 - 2vu + u^2 + 2uv} = \frac{2\frac{u}{v}}{1+\frac{u^2}{v^2}} = \frac{2\frac{v}{u}}{1+\frac{v^2}{u^2}}$

on peut définir $\boxed{x = \frac{u}{v} \text{ et } \eta = \frac{2x}{1+x^2}}$ (a)

ou $\boxed{x = \frac{v}{u} \text{ et } \eta = \frac{2x}{1+x^2}}$ (b)

11) Choisissons (b) $\quad \eta' = 0 \iff 2(1+x^2) - 4x^2 = 0$

$x = 1 \quad u = v$



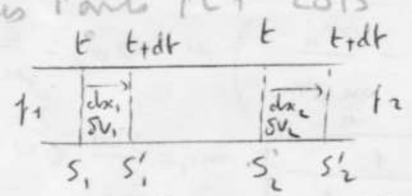
Rendement max pour $x=1$ $u=v$

Rendement nul pour $x=0$ $v=0$

ou $x\to\infty$ $u=0$

Normal que $\eta = 0$ si la fusée n'avance pas ou si aucun gaz n'est éjecté.

12)



1er principe au syst $[S_1 ; S_2]$: $dU + dE_c = \delta W + \delta Q$

si on néglige la pesanteur $\delta W = \delta W' + \delta W_{pression}$

avec $\delta W_{pression} = p_1 S_1 dx_1 - p_2 S_2 dx_2 = p_1 \delta V_1 - p_2 \delta V_2$

$dU = U_{S_1'S_2'} - U_{S_1 S_2} = U_{S_2 S_2'} - U_{S_1 S_1'}$ en rég. permanent

$dU = \delta U_2 - \delta U_1$ de m̂ pour dE_c

Alors $\delta U_2 - \delta U_1 + \delta E_{c_2} - \delta E_{c_1} = \delta W' + p_1 \delta V_1 - p_2 \delta V_2 + \delta Q$

Avec $\delta H = \delta U + p\delta V$ on obtient

$\delta H_2 - \delta H_1 + \delta E_{c_2} - \delta E_{c_1} = \delta W' + \delta Q$

en introduisant h les valeurs massiques :

$$\boxed{\delta m\,(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\delta m\,(v_2^2 - v_1^2) = \delta W' + \delta Q}$$

13) Hyp. énoncé : $\delta Q = 0$ $v_c = v_1 = 0$

GP $h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_c) \simeq -c_p T_c$

$$c_{p\,\text{massique}} = \frac{c_{pm\,\text{molaire}}}{M} = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1) M}$$

Tuyère $\Rightarrow \delta W' = 0$

d'où $h_2 - h_1 + \frac{1}{2} v_2^2 = 0 \to v_2 = \sqrt{2(h_1 - h_2)}$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma R}{(\gamma-1)M} T_c}}$$

14) $H_2 + \frac{1}{2} O_2 \longrightarrow H_2O$

$$\underline{v_2} = \sqrt{\frac{2 \times 1,4 \times 8,31}{0,4 \times 18 \times 10^{-3}} \times 3.10^3} = \underline{3,11.10^3\ ms^{-1}}$$

D'après 4) $\underline{I_s} = \frac{v_2}{g} = \frac{3,11.10^3}{9,8} = \underline{318\ s}$

III 15) Forces : $-e\vec{E}$ électrique

$-e\vec{v} \wedge \vec{B}$ magnétique : négligeable si $v \ll c$

$m_e \vec{g}$: poids fortement négligeable / eE

pas de frottement "non collisionnel"

16) Régime ∿ établi : $m_e \dot{\underline{v}}_e = -e\underline{E}$

soit $m_e \underline{v_e} = -\frac{e}{i\omega}\underline{E}$

$$\boxed{\vec{\underline{v_e}} = i\frac{e}{m_e \omega} E_0 e^{i(\omega t - kx)} \hat{u}_y}$$

$\vec{\underline{j}} \simeq -ne\vec{\underline{v_e}}$ (ions immobiles)

$$\vec{\underline{j}} = -i\frac{ne^2}{m_e\omega}\vec{\underline{E}} = \underline{\sigma}\vec{\underline{E}} \rightarrow \boxed{\underline{\sigma} = -\frac{ine^2}{m_e \omega}}$$

17) $\mathrm{div}\,\vec{\underline{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ avec $\vec{\underline{E}} = \underline{E_y}(x)\hat{u}_y$

$\mathrm{div}\,\vec{\underline{E}} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ on a donc bien $\boxed{\rho = 0}$ (cas)

Éqs Maxwell : $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\quad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ $\quad \vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

$\vec{rot}\,\vec{rot}\,\vec{E} = \vec{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - \Delta\vec{E}$

$-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{rot}\,\vec{B}) = 0 - \Delta\vec{E}$

$-\frac{\partial}{\partial t}\mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\Delta\vec{E}$

$\Delta\vec{\underline{E}} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{\underline{E}}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial \vec{\underline{j}}}{\partial t} = \mu_0 \underline{\sigma}\, i\omega\, \vec{\underline{E}}$

$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \mu_0 \sigma i\omega = \mu_0\frac{ne^2}{m_e}$

$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0\frac{ne^2}{m_e} = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0\varepsilon_0\omega_p^2 = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_p^2)$

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$ éq de dispersion.

18) Propagation possible si $k^2 > 0$ càd $\omega > \omega_p$

si $\omega < \omega_p$ (càd $k^2 < 0$) alors k est imaginaire pur et e^{-ikx} devient un facteur d'atténuation

19) $m_e \dot{\vec{v}}_e = -e\vec{v}_e \wedge \vec{B}$

La force magnétique est constamment ⊥ à la vitesse et à $\vec{B}$.

$\uparrow \vec{B}$

Si la vitesse initiale est dans le plan ⊥B alors la force ⊥ $\vec{B}$ obligera le mouvement ultérieur dans le plan ⊥ B et ainsi de suite.

Soient x et y les axes du plan ⊥ B

$$\begin{cases} m_e \dot{v}_{ex} = -eBv_{ey} \\ m_e \dot{v}_{ey} = +eBv_{ex} \\ m_e \dot{v}_{ez} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_e \ddot{v}_{ex} = -\frac{e^2B^2}{m_e} v_{ex} \\ m_e \ddot{v}_{ey} = -\frac{e^2B^2}{m_e} v_{ey} \end{cases}$$

$\Rightarrow v_{ez} = 0$ si à $t=0$ $v_{ez0} = 0$

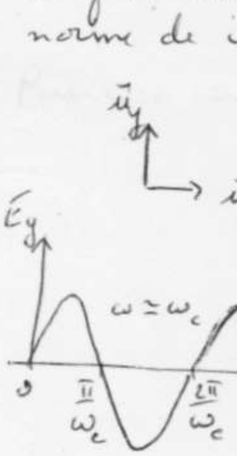
$$\text{d'où} \begin{cases} \ddot{v}_{ex} + \frac{e^2B^2}{m_e^2} v_{ex} = 0 \\ \ddot{v}_{ey} + \frac{e^2B^2}{m_e^2} v_{ey} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{ex} = A\cos\omega_e t + B\sin\omega_e t \\ v_{ey} = A'\cos\omega_e t + B'\sin\omega_e t \end{cases}$$

Ce qui est l'éq paramétrée d'un cercle.

$$\boxed{\omega_c = \frac{eB}{m_e}} = \frac{1,6.10^{-19} \times 0,2}{9,11.10^{-31}} = \underline{3,51\,10^{10}\ s^{-1}}$$

20) $m_e \dot{\vec{v}}_e = -e\vec{E} - e\vec{v}_e \wedge \vec{B}_0$

La force magnétique n'augmente pas la norme de $\vec{v}_e$. Seul $\vec{E}$ l'accélère.



$\frac{1}{2}$ tour décrit en $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_c}$
Si $\omega \simeq \omega_c$ E est alors > 0

$\frac{1}{2}$ tour décrit en $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_c}$
Si $\omega = \omega_c$ E est alors < 0

L'e⁻ est alors accéléré ds le $\bar{m}$ sens pour le tour complet

Si $\omega = \omega_c$ le champ $\vec{E}$ oscille à la $\bar{m}$ période que la vitesse de rotation angulaire ce qui met en phase ou ds le $\bar{m}$ sens les accélérations dues à $\vec{E}$ au cours de cette rotation.

21) Pour avoir une onde on a vu que $\omega \geq \omega_p$
le max correspond à $\omega = \omega_{p\,max}$

Comme $\omega \simeq \omega_c \longrightarrow \omega_c = \omega_{p\,max}$

$$\longrightarrow \omega_c^2 = \frac{n_{max} e^2}{m_e \varepsilon_0} \longrightarrow \boxed{n_{max} = \frac{B^2 \varepsilon_0}{m_e}}$$

AN $\underline{n_{max}} = \dfrac{0,2^2 \cdot 8,85.10^{-12}}{9,11.10^{-31}} = \underline{3,89.10^{17}\ m^{-3}}$

22) Energie de photon associée à ω_c

$$\underline{E} = h\nu = \frac{h\omega_c}{2\pi} = \frac{6,62 \times 10^{-34} \times 3,51.10^{10}}{2\pi \times 1,6 \times 10^{-19}} = \underline{2,31.10^{-5}\ eV}$$

Cette énergie est très inférieure aux 12,0 eV de première ionisation du Xénon.
Il n'y aura pas de contribution de la photo-dissociation.

23) $I = \dfrac{\text{nb ions} \times \text{leur charge}}{\text{durée}}$

$$\boxed{I = \frac{D_m e}{\mu}}$$

24) $\Delta E_c = eV_a = \frac{1}{2}\mu v^2 \longrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2eV_a}{\mu}}}$

d'où$^{(3)}$ $F = D_m v = D_m \sqrt{\dfrac{2eV_a}{\mu}} = \dfrac{I\mu}{e}\sqrt{\dfrac{2eV_0}{\mu}}$

$$\boxed{F = I\sqrt{\frac{2\mu V_0}{e}}}$$

25) $I = j'\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$

d'où $F = j'\pi\dfrac{D^2}{4}\sqrt{\dfrac{2\mu V_a}{e}} = \dfrac{4\varepsilon_0}{9}\sqrt{\dfrac{2e}{\mu}}\dfrac{V_a^{\frac{3}{2}}}{d^2}\dfrac{\pi D^2}{4}\sqrt{\dots}$

$$\boxed{F = \frac{2}{9}\varepsilon_0 \frac{\pi D^2}{d^2} V_a^2}$$

26) $F = \dfrac{2}{9} \times \dfrac{8,85.10^{-12}\,\pi \times 4\times 10^{-6} \times 700^2}{2,5^2 \times 10^{-6}} \times 2,2.10\dots$

$\underline{F = 4,26.10^{-3}\ N}$ pour les N trous

$$v = \sqrt{\frac{2eV_a}{\mu}} = \sqrt{\frac{2eV_a \mathcal{N}}{M}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 700 \times 6,02 \times 10^{23}}{131 \times 10^{-3}}}$$

$\underline{v = 3,21.10^4\ m\,s^{-1}}$

On déduit le débit $D_m = \dfrac{F}{v} = \dfrac{4,26.10^{-3}}{3,21.10^4}$

$D_m = 1,33.10^{-7}$ kg/s

soit $m = D_m \Delta t = 1,33.10^{-7} \times 90 \times 24 \times 3600$

$\underline{m = 1,03\ kg}$ consommée en 90 jours

$\boxed{P_{c\,jet} = \frac{1}{2} D_m v^2}$ ds le réf de la fusée

$P_{c\,jet} = \frac{1}{2} \times 1,33.10^{-7} \times 3,21^2 \times 10^8 = \underline{68,5\ W}$

27) L'ionisation va électriser les parois ce qui n'est sans doute pas souhaitable. Il faut donc neutraliser.

IV

28) En orbite circulaire $E_m = \frac{1}{2}E_p = -E_c$

(démo : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r}$
PFD : $m\frac{v^2}{r} = \frac{GM_T m}{r^2}$)

d'où $\boxed{E_m = -\frac{1}{2}mv^2}$

Freinage $\Rightarrow E_m \searrow \Rightarrow -v^2 \searrow \Rightarrow v \nearrow$
le freinage entraîne une augmentation de la vitesse.

29) $E_m = -\dfrac{GM_T m}{2r} \longrightarrow \boxed{dE_m = \frac{GM_T m}{2}\frac{dr}{r^2}}$

$$\underline{dE_m} = \frac{6,67.10^{-11} \cdot 5,97 \times 10^{24} \cdot 250\,(-20)}{2\left[(6400+300)10^3\right]^2} = \underline{-2,22.10^4\ J}$$

30) Cela permet d'avoir le travail de la force de frottement : $W_{frott} = -|F_{frott}|\,2\pi r = dE_m$

d'où $\underline{|F_{frott}|} = \dfrac{|dE_m|}{2\pi r} = \dfrac{2,22.10^4}{2\pi(6400+300)10^3} = \underline{0,527.10^{-3}\ N}$

On remarque $|F_{frott}| < F_{poussée\ moteur}$ calculée en 26)
Le moteur ionique