

ETUDE D'UNE INDUCTANCE

Ce problème a pour objet l'étude du comportement d'une inductance propre dans certains montages à caractère sélectif fonctionnant en régime permanent; la partie II est indépendante de la partie I et les questions 9 et 10 de la partie I ne sont pas nécessaires pour continuer; les candidats sont cependant invités à parcourir l'ensemble de l'énoncé avant d'en entreprendre le traitement.

PREMIERE PARTIE : CARACTERISATION D'UNE INDUCTANCE PROPRE

Le filtre de la figure 1 est constitué d'éléments supposés parfaits: L est une inductance propre, C un condensateur, R une résistance et e la f.e.m. d'un générateur délivrant un signal périodique de pulsation ω ; pour les valeurs numériques, on prendra $R = 10^5 \Omega$, $C = 10^{-8} F$ et $L = 0,10 H$. On considère d'abord un générateur sinusoïdal de tension et on pose: $e(t) = A \cos \omega t$, $u_s = B \cos(\omega t + \phi)$, $\omega = 2\pi f$, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q_0 = R\sqrt{C/L}$.

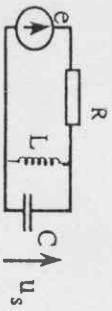


Figure 1 : Filtre

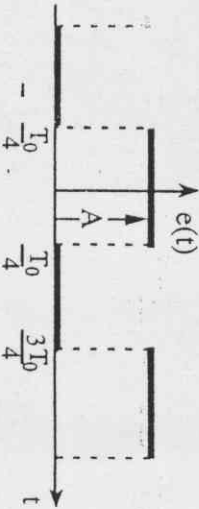


Figure 2 : Tension en crêteau périodique

- I-1) Calculer numériquement ω_0 , f_0 , et Q_0 .
- I-2) Représenter B/A en fonction de la fréquence: donner l'expression et la valeur numérique de la largeur de la bande passante à 3dB. Quelle est la nature de ce filtre?
- I-3) Représenter le déphasage ϕ en fonction de la fréquence: déterminer l'expression et la valeur de $d\phi/dt$ au voisinage de f_0 . (*(cf inductance)*)
- I-4) Pour déterminer expérimentalement f_0 , on peut, au choix, étudier la réponse en phase ou en amplitude du circuit; la première méthode est une méthode de zéro, l'autre une méthode

d'extremum. Quelle est la méthode généralement la plus sensible et pourquoi? Décrivez sommairement un procédé expérimental de mesure de f_0 .

- I-5) Donner l'expression de la tension $u_s(t)$ en fonction du temps, lorsque le générateur délivre une tension en crêteau périodique de fréquence $f_0 = 1/T_0$ (figure 2). Commenter. Le développement en série de Fourier de ce signal, supposé pair et de durée illimitée dans les deux sens du temps, est :

$$e(t) = \frac{A}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{2A}{\pi(2p+1)} \cos(2p+1)\omega t$$

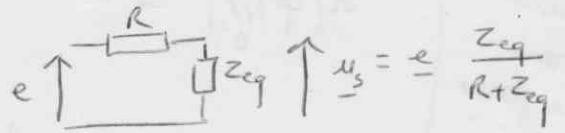
$$I.1) \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,1 \times 10^{-8}}} = 10^{4,5} = 3,2 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \underline{5030 \text{ Hz}}$$

$$Q_0 = R \sqrt{\frac{C}{L}} = 10^6 \sqrt{\frac{10^{-8}}{0,1}} = \underline{316}$$

$$I.2) \quad e = A \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \underline{e} = A e^{j\omega t}$$

$$u_s = B \cos(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \underline{u_s} = B e^{j(\omega t + \varphi)}$$



$$\underline{u_s} = \underline{e} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_{eq}}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{Z_{eq}} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\underline{u_s} = \underline{e} \cdot \frac{1}{1 + j(R\omega - \frac{R}{L\omega})}$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_0 = \frac{RC}{L} \\ Q_0 \omega_0 = \frac{R}{L} \end{array} \right.$$

$$\underline{u_s} = \underline{e} \cdot \frac{1}{1 + j Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

module $\Rightarrow$

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{si } \omega \rightarrow 0 \quad H = \frac{u_s}{e} \approx j \frac{\omega}{Q_0 \omega_0} \rightarrow 0 \\ \text{si } \omega \rightarrow \infty \quad H = \frac{u_s}{e} \approx -j \frac{\omega_0}{Q_0 \omega} \rightarrow 0 \end{array} \right] \Rightarrow \text{large bande}$$

Max de $\frac{B}{A}$ pour $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$ minimal, c'est $\omega = \omega_0$ et $\left(\frac{B}{A} \right)_{\max} = 1$

ω_c obtenu pour $\frac{B}{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ soit $Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 1$

soit $Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1$

2 eq^{ns} du 2^d degré en ω : $Q_0 \omega^2 \mp \omega_0 \omega - Q_0 \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = \omega_0^2 + 4 Q_0^2 \omega_0^2 = \omega_0^2 (1 + 4 Q_0^2)$$

$$\omega_c = \frac{1}{2 Q_0} \left(\mp \omega_0 + \omega_0 \sqrt{1 + 4 Q_0^2} \right) \quad \text{seules solutions positives parmi les 4 au total}$$

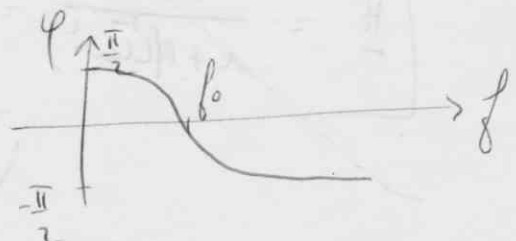
$$\omega_c = \frac{1}{2 R C} \left(\mp 1 + \sqrt{1 + 4 R^2 C^2} \right)$$

$$f_c = \frac{f_0}{2 Q_0} \left(\mp 1 + \sqrt{1 + 4 Q_0^2} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta f_{\text{bande passante}} = \frac{f_0}{Q_0} = \frac{5030}{316} = 16 \text{ Hz}$$

I.3) rappel

$\omega \rightarrow 0$	$H \sim j \frac{\omega}{Q_0 \omega_0}$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$\omega \rightarrow \infty$	$H \sim -j \frac{\omega_0}{Q_0 \omega}$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$
$\omega = \omega_0$	$H = 1$	$\varphi = 0$



$$\underline{u_s} = \underline{e} \cdot \frac{1}{1 + j Q_0 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)}$$

Approx: $f = f_0 (1 + \varepsilon)$

$$\varphi = \arctan \left(-Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) = \arctan \left(Q_0 \left(\frac{f_0}{f} - \frac{f}{f_0} \right) \right) \quad (\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}) \quad (2)$$

$$\frac{d\varphi}{df} = Q_0 \left(-\frac{f_0}{f^2} - \frac{1}{f_0} \right) \cdot \frac{1}{1 + Q_0^2 \left(\frac{f_0}{f} - \frac{f}{f_0} \right)^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{d\varphi}{df} \right)_{f \rightarrow f_0} \approx -\frac{2Q_0}{f_0}}$$

$$\text{AN} \quad \left(\frac{d\varphi}{df} \right)_{f_0} = -\frac{2 \times 316}{5030} = \underline{\underline{-0,125 \text{ rads}}}$$

I.4) La méthode de 0 correspond à $\varphi(f_0) = 0$. Il suffit de chercher f pour laquelle u_s et e sont en phase. Méthode bien, sûre.
 La méthode de l'extrémum correspond à $\frac{B}{A}(f_0) = \left(\frac{B}{A} \right)_{\max}$. A moins que le max soit très pointu (ce qui est probab^l le cas ici car $Q_0 = 316 \gg 1$) c'est moins précis pour $Q_0 < 10$ (mon estimation).

I.5) Le filtre passe bande ne retient que la composante de fréquence autour de f_0 à 8 Hz près ($\frac{1}{2}$ largeur de bande passante).
 Donc seul le fondamental passe ($f = 0$ de la série de Fourier).
 et $\boxed{u_s(t) = \frac{2A}{\pi} \cos(\omega_0 t)}$ le module = 1 car $\frac{B}{A}(\omega_0) = 1$
 le déphasage = 0 en ω_0