

1.2 Oscillations d'une goutte.

1.2.1 Introduction à la capillarité.

Les forces de tension de surface traduisent macroscopiquement l'action des forces attractives entre les molécules composant le fluide. Comme les forces de cohésion de la matière sont à très courte portée, au coeur du liquide la somme de ces forces se moyenne à zéro, en revanche à la surface elles vont agir en attirant tout point de la surface vers le centre, en supposant que la surface est en contact avec de l'air ou du vide. Il en résulte qu'augmenter la surface du liquide coûte de l'énergie. La tension de surface contrôle ainsi la forme des interfaces liquides. L'ensemble des phénomènes liés à la tension de surface se nomme historiquement capillarité, de capillus le cheveu en latin, car ses effets s'observent sur des échelles de longueur de l'ordre du millimètre, comme par exemple pour des liquides contenus dans un tube dit capillaire, fin comme un cheveu.

Le travail élémentaire δW , à fournir pour accroître l'aire de la surface de δA , s'écrit $\delta W = \gamma \delta A$, où γ est la tension de surface. On en déduit qu'on peut associer à une interface eau/air de surface S une énergie potentielle de capillarité $E_T = \gamma S$.

Q11. Soit une goutte d'eau sphérique de rayon R . Pourquoi qualitativement lorsque la capillarité domine par rapport à la gravité, la forme d'équilibre de la goutte est une sphère ?

Q12. On cherche à déterminer sous quelle condition sur le rayon la gravité est effectivement négligeable par rapport à la capillarité. Pour y répondre, exprimer l'énergie potentielle de capillarité E_T et l'énergie potentielle de gravité E_g , d'une goutte sphérique soumise à son propre poids. On suppose que la goutte est en contact avec un support horizontal (appelé par la suite substrat) et que le contact se fait sur une surface assimilable à un point. Ce point sera pris comme référence dans le calcul de E_g . On pourra utiliser les coordonnées sphériques de centre celui de la goutte. On rappelle que le volume élémentaire en coordonnées sphériques s'écrit : $d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$.

Q13. En déduire un rayon critique, dont on donnera l'expression en fonction de la longueur capillaire

$$L_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}.$$

1.2.2 Modes de vibration d'une goutte cylindrique.

Pour étudier les oscillations d'une goutte uniquement dues à la capillarité, on considère le cas d'une goutte cylindrique, formant une flaque sur un substrat horizontal, de rayon R_0 au repos et d'épaisseur h . En faisant vibrer verticalement ce substrat, il est possible d'exciter des modes propres d'oscillations de la goutte, correspondant à des vibrations du rayon du cylindre (voir Fig. 2). On suppose ainsi que le rayon de la goutte peut s'écrire

$$R(t, \theta) = R_1(t) + a_n(t) \cos(n\theta)$$

Avec $a_n \ll R_0$, $n \geq 2$ et en supposant que l'épaisseur de la goutte h reste constante. Nous verrons par la suite que la fonction que la fonction $a_n(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps et de fréquence f_n dépendant du mode d'indice n sélectionné. On peut montrer dans ces conditions, que les aires des faces supérieure et inférieure ne changent pas au cours de l'oscillation, tandis que l'aire de la face latérale varie.

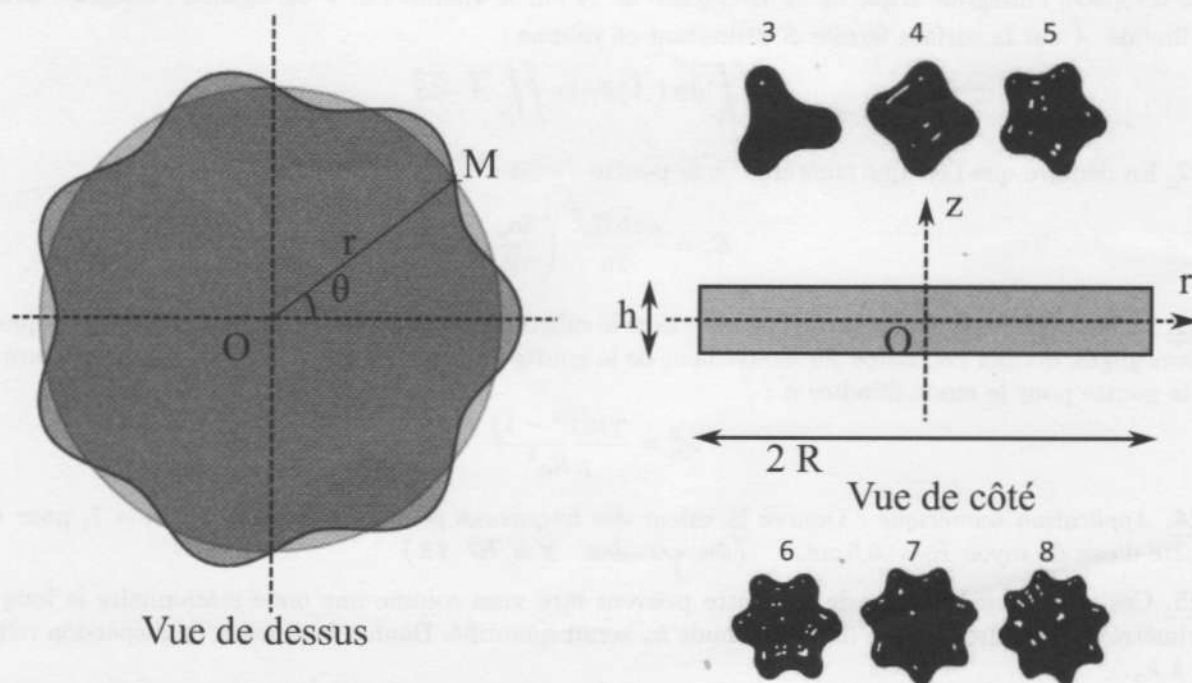


FIGURE 2 – Schéma des oscillations d'une goutte cylindrique vibrée verticalement pour le cas $n = 7$. Les photographies illustrent l'observation expérimentale de ces modes propres d'oscillations d'une goutte d'un liquide noir opaque de volume 1 mL, pour différentes valeurs de n (Crédit Timothée Jamin).

Q14. En exprimant la conservation du volume de la goutte, écrire $R_1(t)$ en fonction de R_0 et de a_n , pour $a_n \ll R_0$.

longueur
Q15. Montrer que la variation élémentaire de longueur le long de la surface latérale de la goutte, s'écrit :

$$dl = R \sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2} d\theta$$

Q16. En déduire la variation de la surface latérale en fonction de n et de a_n , toujours avec l'hypothèse $a_n \ll R_0$. Montrer que la variation correspondante d'énergie capillaire E_T s'écrit :

$$E_T = \frac{\gamma \pi h a_n^2 (n^2 - 1)}{2R_0} \quad (1)$$

Pour calculer l'énergie cinétique, il faut déterminer l'écoulement du fluide dans la goutte au cours de la vibration. Sachant que les frottements visqueux sont négligés, on suppose que l'écoulement est irrotationnel et que le champ de vitesse dérive d'un potentiel ϕ , tel que

$$\vec{v}(r, \theta, t) = -\text{grad} \phi(r, \theta, t).$$

Q17. Justifier que ϕ vérifie une équation de Laplace, $\Delta \phi = 0$.

Q18. On cherche des solutions de la forme $\phi = b_n(r, t) \cos(n\theta)$. Montrer qu'une solution de l'équation de Laplace précédente est obtenue en prenant, $b_n(r, t) = c_n(t) r^n$. *Formulaire en cylindrique $\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$*

Q19. Quelle est la condition à la limite pour la vitesse radiale en $r = R$? Au premier ordre en a_n , exprimer $\phi(r, \theta, t)$ en fonction de $a_n(t)$.

Q20. Donner l'expression de l'énergie cinétique de la goutte en vibration E_c sous la forme d'une intégrale faisant intervenir ϕ .

Q21. Justifier que $(\vec{\text{grad}} \phi)^2 = \text{div}(\phi \vec{\text{grad}} \phi)$. *(Formulaire $\text{div}(\phi \vec{A}) = \phi \text{div} \vec{A} + \vec{\text{grad}} \phi \cdot \vec{A}$)*

Le théorème de Green-Ostrogradsky indique que pour une fonction vectorielle $\vec{A}$ dépendant des coordonnées d'espace, l'intégrale triple de la divergence de $\vec{A}$ sur le volume fini V est égale à l'intégrale double du flux de $\vec{A}$ sur la surface fermée S délimitant ce volume :

$$\iiint_V \text{div}(\vec{A}) d\tau = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Q22. En déduire que l'énergie cinétique de la goutte s'écrit : *(à l'ordre 2)*

$$E_c = \frac{\rho \pi h R_0^2}{2n} \left(\frac{da_n}{dt} \right)^2 \quad (2)$$

Q23. Sachant que les frottements de la goutte avec le substrat le supportant et que la dissipation visqueuse sont négligés, donner l'équation du mouvement de la goutte et trouver l'expression des pulsations propres de la goutte pour le mode d'indice n :

$$\omega_n^2 = \frac{\gamma n(n^2 - 1)}{\rho R_0^3} \quad (3)$$

Q24. Application numérique : Donner la valeur des fréquences propres pour $n = 3$ et $n = 7$, pour une goutte d'eau de rayon $R_0 = 0,5$ cm. *(On prendra $\gamma = 70$ sI)*

Q25. Ces vibrations latérales de la goutte peuvent être vues comme une onde stationnaire le long du périmètre du cylindre, dont le nombre d'onde k_n serait quantifié. Donner la relation de dispersion reliant ω_n à k_n .

Q26. Comment se simplifie cette relation de dispersion lorsque la longueur d'onde est petite devant le périmètre de la goutte ?

Ces modes de vibrations azimuthaux d'une goutte peuvent facilement être observés lorsqu'une goutte dite en caléfaction lévite au dessus de sa vapeur. On peut placer par exemple une goutte d'eau sur une plaque chauffante à une température de l'ordre de 200°C ou déposer une goutte d'azote liquide sur le sol à température ambiante.

14) La conservation du volume, quand la hauteur reste identique revient à la conservation de la section de base :

$$\pi R_0^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{R(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R(\theta)^2}{2} d\theta$$

$$\pi R_0^2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta (R_1 + a_n \cos n\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2} R_1^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{2a_n \cos n\theta}{R_1} + \frac{a_n^2 \cos^2 n\theta}{R_1^2} \right) d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta = \left[\frac{\sin n\theta}{n} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (n \text{ entier})$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2n\theta + 1}{2} d\theta = \left[\frac{\sin 2n\theta}{2 \cdot 2n} \right]_0^{2\pi} + \pi = \pi$$

$$\rightarrow \pi R_0^2 = \frac{R_1^2}{2} \left(2\pi + \frac{a_n^2}{R_1^2} \cdot \pi \right) = \pi R_1^2 + \frac{\pi a_n^2}{2}$$

$$\text{d'où } R_1^2 = R_0^2 - \frac{a_n^2}{2} \text{ soit } R_1 = R_0 \left(1 - \frac{a_n^2}{2R_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Comme $a_n \ll R_0$

$$R_1 \approx R_0 \left(1 - \frac{a_n^2}{4R_0^2} \right)$$

15) $dl = \sqrt{R^2 d\theta^2 + dR^2}$

$$dl = R d\theta \sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2} \quad (\text{OK})$$

16) Avec $R = R_1 + a_n \cos(n\theta)$

$$\frac{dR}{d\theta} = -a_n n \sin(n\theta)$$

$$dl = (R_1 + a_n \cos(n\theta)) \sqrt{1 + \frac{a_n^2 n^2 \sin^2(n\theta)}{(R_1 + a_n \cos(n\theta))^2}} d\theta$$

L'idée est de ne pas dépasser l'ordre 2 en $a_n \Rightarrow$ on peut déjà retirer $a_n \cos n\theta$ du dénominateur

Remplaçons $R_1 = R_0 \left(1 - \frac{a_n^2}{4R_0^2} \right)$

$$dl = \left(R_0 \left(1 - \frac{a_n^2}{4R_0^2} \right) + a_n \cos n\theta \right) \sqrt{1 + \frac{a_n^2 n^2 \sin^2 n\theta}{R_0^2 \left(1 - \frac{a_n^2}{4R_0^2} \right)^2}} d\theta$$

Toujours par la raison de ne pas prendre en compte les termes d'ordre > 2 on retire le $\frac{a_n^2}{4R_0^2}$ du dénominateur.

$$dl = \left(R_0 \left(1 - \frac{a_n^2}{4R_0^2} \right) + a_n \cos n\theta \right) \sqrt{1 + \frac{a_n^2 n^2 \sin^2 n\theta}{R_0^2}} d\theta$$

$$= \left(R_0 \left(1 - \frac{a_n^2}{4R_0^2} \right) + a_n \cos n\theta \right) \left(1 + \frac{a_n^2 n^2 \sin^2 n\theta}{2R_0^2} \right) d\theta$$

Toujours en ne conservant que les termes d'ordre 2

$$dl = \left(R_0 \left(1 - \frac{a_n^2}{4R_0^2} \right) + a_n \cos n\theta + \frac{a_n^2 n^2 \sin^2 n\theta}{2R_0} \right) d\theta$$

$$l = \int_0^{2\pi} dl \quad \text{sachant que } \int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta = 0 \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta d\theta = \pi$$

$$l = 2\pi R_0 \left(1 - \frac{a_n^2}{4R_0^2} \right) + \frac{\pi a_n^2 n^2}{2R_0}$$

La variation de longueur entre le repos et les oscillations $\Delta l = l - l_{\text{repos}} = l - 2\pi R_0$

$$\Delta l = -\frac{\pi a_n^2}{2R_0} + \frac{\pi a_n^2 n^2}{2R_0} = \frac{\pi a_n^2}{2R_0} (n^2 - 1)$$

d'où la variation d'énergie capillaire entre le repos et les oscillations :

$$E_T = \gamma h \Delta l = \frac{\gamma h \pi a_n^2 (n^2 - 1)}{2R_0} \quad (\text{OK})$$

17) Incompressibilité : $\text{div} \vec{v} = 0$

Comme $\vec{v} = -\text{grad} \phi$ et que $\text{div}(\text{grad}) = \Delta$ on a bien $\Delta \phi = 0$ OK

18) Injecter $\phi_n = c_n r^n$ dans $\phi = \phi_n \cos n\theta$

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad \phi \text{ dépend de } r \text{ et de } \theta$$

$$\rightarrow n(n-1)c_n r^{n-2} + n c_n r^{n-2} = 0 \quad \text{bien vérifié}$$

donc $\phi = c_n r^n \cos n\theta$ est solution de $\Delta \phi = 0$

19) $r = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_R$ doit être égale à $\dot{R}$

$$-c_n n R^{n-1} \cos n\theta = \dot{R}_1 + \dot{a}_n \cos(n\theta)$$

comme $R_1 = R_0 \left(1 - \frac{a_n^2}{4R_0^2} \right)$

$$\dot{R}_1 = -\frac{2 a_n \dot{a}_n}{4R_0} \text{ du 2^e ordre en } a_n$$

donc $\dot{R}_1 \ll \dot{a}_n \cos(n\theta)$

$$-c_n n R_0^{n-1} \cos n\theta \approx \dot{a}_n \cos(n\theta) \rightarrow c_n = \frac{\dot{a}_n}{n R_0^{n-1}}$$

$$\text{et } \phi = -\frac{\ddot{a}_n}{n R_0^{n-1}} r^n \cos n\theta$$

$$20) \left[E_c = \iiint \frac{1}{2} \rho d\tau \dot{v}^2(r, \theta, t) = \frac{\rho}{2} \iiint (\text{grad} \phi)^2 d\tau \right]$$

21) $\text{div}(\phi \vec{A}) = \phi \text{div} \vec{A} + \text{grad} \phi \cdot \vec{A}$ (énoncé)
en remplaçant $\vec{A} = \text{grad} \phi$:

$$\begin{aligned} \text{div}(\phi \text{grad} \phi) &= \phi \text{div}(\text{grad} \phi) + (\text{grad} \phi)^2 \\ &= \phi \Delta \phi + (\text{grad} \phi)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

on a bien $\text{div}(\phi \text{grad} \phi) = (\text{grad} \phi)^2$

$$\text{d'où } \iiint (\text{grad} \phi)^2 d\tau = \iiint \text{div}(\phi \text{grad} \phi) d\tau$$

$$\text{par Ostrogradski} = \iint_S \phi \text{grad} \phi \cdot d\vec{S}$$

$$22) \iint_S \phi \text{grad} \phi \cdot d\vec{S} = \iint_{n R_0^{n-1}} -\frac{\ddot{a}_n}{n R_0^{n-1}} r^n \cos n\theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r \cdot d\vec{S} \right)$$

(cf 19)

A l'ordre 2 pas plus, on remplace r par R_0 .
Ainsi $\ddot{a}_n r^n$ est d'ordre 2

$$\begin{aligned} \iint_S \phi \text{grad} \phi \cdot d\vec{S} &= \frac{R_0^n}{n R_0^{n-1}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \ddot{a}_n^2 \cos^2 n\theta \, n R_0 \, d\theta \\ &= \frac{R_0^2 h}{n} \int_0^{2\pi} \ddot{a}_n^2 \cos^2 n\theta \, d\theta = \frac{R_0^2 h \ddot{a}_n^2 \pi}{n} \end{aligned}$$

(ne pas dépasser l'ordre 2)

$$\text{Ainsi } E_c = \frac{\rho R_0^2 h \ddot{a}_n^2 \pi}{2 n} \quad (\text{OK})$$

23) Sans dissipation d'énergie, l'énergie totale se conserve : $E_T + E_c = \text{cte}$
On différencie ou dérive / t :

$$\rightarrow \frac{(n^2-1) \delta \pi h}{2 R_0} 2 \ddot{a}_n \dot{a}_n + \frac{\rho R_0^2 h \pi}{2 n} 2 \ddot{a}_n \ddot{a}_n = 0$$

$$\text{soit } \ddot{a}_n + \frac{n(n^2-1) \delta}{\rho R_0^3} a_n = 0$$

$$\text{Oscillations à } \left[\omega_n^2 = \frac{n(n^2-1) \delta}{\rho R_0^3} \right]$$

$$24) \text{AN } n=3 \rightarrow \omega^2 = \frac{3 \cdot 8 \cdot 70 \cdot 10^{-3}}{0,5^3 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3}$$

$$\omega = 116 \, \text{s}^{-1}$$

$$n=7 \rightarrow \omega^2 = \frac{116^2 \cdot 7 \cdot 48}{3 \cdot 8} \rightarrow \omega = 434 \, \text{s}^{-1}$$

$$\text{soit } f_3 = 18 \, \text{Hz} \quad f_7 = 70 \, \text{Hz}$$

25) Une onde stationnaire sur le périmètre oblige $2\pi R_0 = n \lambda_n$
(et non pas $n \frac{\lambda_n}{2}$ car le périmètre se referme sur lui-même 

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n}{R_0}$$

26) on remplace $\frac{1}{R_0}$ dans 23)

$$\rightarrow \omega_n^2 = \frac{n(n^2-1) \delta h_n^3}{\rho n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} \frac{\delta h_n^3}{\rho}$$

26) pour $\frac{1}{n} \ll R_0$ donc n grand

$$\omega_n^2 \approx \frac{\delta h_n^3}{\rho} \quad n \text{ n'apparaît plus}$$