

FORMULAIRE

Constantes fondamentales

Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 2\pi\hbar = 6.62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante d'Avogadro	$N_a = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge de l'électron	$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$

Valeurs numériques utiles

1 picoseconde	$1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$
1 femtoseconde	$1 \text{ fs} = 10^{-15} \text{ s}$
1 attoseconde	$1 \text{ as} = 10^{-18} \text{ s}$
1 gigahertz	$1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ Hz}$
1 térahertz	$1 \text{ THz} = 10^{12} \text{ Hz}$
1 électron-volt	$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$
unité de masse atomique (amu)	$1 \text{ amu} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Notations

On adopte la notation complexe $\mathcal{G}(t)$ pour toute grandeur $G(t)$ réelle dépendant du temps selon

$$G(t) = \frac{1}{2} (\mathcal{G}(t) + \mathcal{G}^*(t)) = \text{Re}(\mathcal{G}(t)).$$

Relations utiles

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Formule du double produit vectoriel pour $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\mathbb{R}^3)^3$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}, \text{ et } (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}.$$

Analyse vectorielle

Pour $\vec{A}$ un champ de vecteur quelconque,

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}.$$

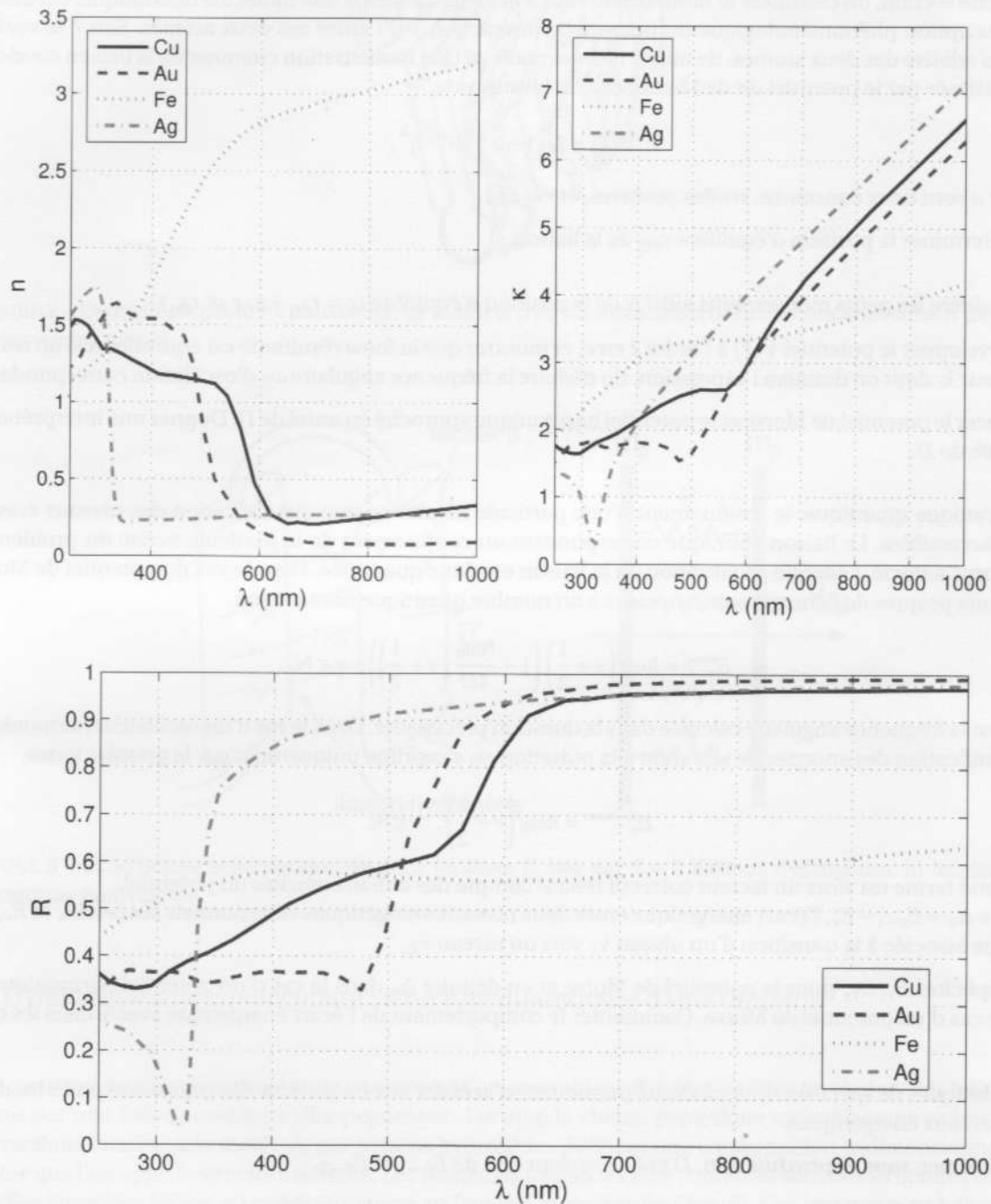


FIGURE 1 – Propriétés optiques de quelques métaux. Parties réelles (n) et imaginaires (κ) de l'indice de différents métaux dans le domaine optique, et coefficient de réflexion en intensité correspondant.

GRANDEURS TABULÉES

Matériau	Longueur d'onde λ (nm)	indice n	$\frac{dn}{d\lambda}$ ($\times 10^{-2} \cdot \mu\text{m}^{-1}$)	$\frac{d^2n}{d\lambda^2}$ ($\times 10^{-1} \cdot \mu\text{m}^{-2}$)	G ($\text{fs}^2 \cdot \text{mm}^{-1}$)
verre type BK7	400	1.5308	-13.17	10.66	120.79
	500	1.5214	-6.58	3.92	86.87
	600	1.5163	-3.91	1.77	67.52
	800	1.5108	-1.97	0.48	43.96
	1000	1.5075	-1.40	0.15	26.93
	1200	1.5049	-1.23	0.03	10.43
verre type SF10	400	1.7783	-52.02	59.44	673.68
	500	1.7432	-20.89	15.55	344.19
	600	1.7267	-11.00	6.12	233.91
	800	1.7112	-4.55	1.58	143.38
	1000	1.7038	-2.62	0.56	99.42
	1200	1.6992	-1.88	0.22	68.59
Saphir	400	1.7866	-17.20	13.55	153.62
	500	1.7743	-8.72	5.10	112.98
	600	1.7676	-5.23	2.32	88.65
	800	1.7602	-2.68	0.64	58.00
	1000	1.7557	-1.92	0.20	35.33
	1200	1.7522	-1.70	0.04	13.40
Quartz	300	1.4878	-30.04	34.31	164.06
	400	1.4701	-11.70	9.20	104.31
	500	1.4623	-5.93	3.48	77.04
	600	1.4580	-3.55	1.59	60.66
	800	1.4533	-1.80	0.44	40.00
	1000	1.4504	-1.27	0.14	27.71
	1200	1.4481	-1.12	0.03	9.76

TABLE 1 – Propriétés de dispersion de quelques matériaux. Le paramètre G est la dispersion de vitesse de groupe.

Gaz	G ($\text{fs}^2 \cdot \text{mm}^{-1}$)
Dioxygène (O_2)	$24.76 \cdot 10^{-3}$
Diazote (N_2)	$18.70 \cdot 10^{-3}$
Air	$20.05 \cdot 10^{-3}$
Hélium (He)	$0.82 \cdot 10^{-3}$
Néon (Ne)	$2.11 \cdot 10^{-3}$
Argon (Ar)	$17.98 \cdot 10^{-3}$
Krypton (Kr)	$37.32 \cdot 10^{-3}$
Xénon (Xe)	$87.42 \cdot 10^{-3}$
Acétylène (C_2H_2)	$78.20 \cdot 10^{-3}$
Ethylène (C_2H_4)	$102.18 \cdot 10^{-3}$
Propane (C_3H_8)	$111.21 \cdot 10^{-3}$

TABLE 2 – Dispersion de vitesse de groupe G de quelques gaz à $\lambda = 800$ nm, pour une pression de 1 bar.

II. Interaction d'une impulsion avec la matière...

Dans cette section, on s'intéresse à l'interaction entre une impulsion femtoseconde et une surface métallique ou semiconductrice. On modélise le métal comme une maille cristalline fixe, constituée d'ions positifs immobiles, et d'un gaz d'électrons libres.

Q16. Connaissez-vous des applications des lasers à impulsions ? On répondra succinctement.

A. Propagation dans un métal

On adopte le modèle de Drude de la description d'un métal : un électron de vitesse $\vec{v}$ est soumis à une force de frottement visqueuse $-\frac{m_e}{\tau} \vec{v}$ traduisant l'interaction avec la maille cristalline. On considère que cet électron est soumis à un champ électrique extérieur de pulsation ω , d'amplitude complexe $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}$. On note n la densité d'électrons libres du métal considéré.

Q17. Montrer que le vecteur densité de courant vérifie une loi d'Ohm généralisée $\vec{j} = \sigma(\omega) \vec{\mathcal{E}}$, où $\sigma(\omega)$ est une conductivité complexe que l'on explicitera.

Q18. Justifier que la densité de charge complexe ρ est nulle.

Q19. Montrer que l'équation de propagation dans le métal s'exprime sous la forme

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \vec{\mathcal{E}} = 0,$$

où l'on explicitera $\epsilon_r(\omega)$ en fonction de τ , ω et ω_p la fréquence plasma du métal définie selon

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}}.$$

Q20. Évaluer τ et ω_p pour le cuivre. Le cuivre permet-il de faire des bons miroirs d'ondes térahertz ? d'ondes optiques dans le domaine visible ? d'ondes ultraviolettes lointaines (que l'on rencontrera dans les impulsions ultracourtes dites "attosecondes") ? Discuter brièvement du cas des autres métaux comme l'or ou l'aluminium. On argumentera en tenant compte des résultats de la question précédente, ainsi que des propriétés optiques des métaux données en début de sujet.

B. Interaction avec un semiconducteur : changer de fréquence...

Un matériau semi-conducteur est un matériau dans lequel chaque électron est lié à un ion de la maille cristalline. Du fait de l'agitation thermique, une faible proportion d'atomes est excitée avec une énergie suffisante pour être ionisés. L'électron issu de cette ionisation peut se déplacer librement dans la maille cristalline, comme dans un métal : on parle de porteur de charge libre. L'interaction avec les autres électrons et la maille cristalline se modélise par une modification de la masse de ces électrons, que l'on note désormais m_{el}^* , appelée *masse effective*. Les ions positifs correspondant à ces électrons devenus libres portent une charge positive. Cette dernière peut se propager de proche en proche par transfert d'électrons liés. On modélise cette "lacune" électronique comme une particule appelée "trou", de charge $+e$ et de masse effective m_{trou}^* .

La dynamique des électrons et des trous est décrite par un modèle de Drude. Sous l'action d'un champ électrique, chaque électron (resp. trou) est soumis à une force de frottement fluide de la forme $-\frac{m_{el}^* \vec{v}_{el}}{\tau_{el}}$ (resp. $-\frac{m_{trou}^* \vec{v}_{trou}}{\tau_{trou}}$), où $\vec{v}_{el}$ (resp. $\vec{v}_{trou}$) est la vitesse d'un électron (resp. d'un trou).

On se place dans un régime avec une constante de temps caractéristique du champ électrique notée τ_0 .

Q21. Dans la limite où $\tau_0 \gg \tau_{el}, \tau_{trou}$, montrer que le vecteur densité de courant $\vec{j}$ peut se mettre sous la forme

$$\vec{j} = (n_{el} \mu_{el} + n_{trou} \mu_{trou}) e \vec{E},$$

où n_{el} (resp. n_{trou}) est la densité volumique d'électrons (resp. de trous), et μ_{el} (resp. μ_{trou}) est appelé *mobilité* des électrons (resp. des trous). Dans le cas de l'arséniure de gallium GaAs, à partir des données proposées en début de sujet, justifier que l'on puisse négliger la contribution des trous dans une première approche.

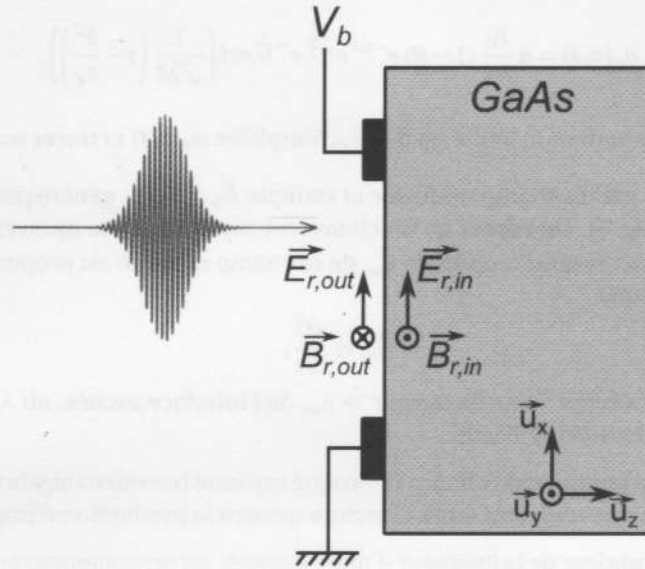


FIGURE 5 – Géométrie d'une antenne photoconductive.

Dans la suite, nous considérerons donc uniquement la contribution des électrons. On considère l'interaction entre une impulsion ultracourte femtoseconde, de longueur d'onde centrale $\lambda_0 = 800$ nm, de durée $\delta = 100$ fs et un cristal de GaAs. La géométrie considérée est schématisée Fig. 5. L'impulsion se propage selon l'axe Oz , en incidence normale sur un demi-espace ($z > 0$) constitué de GaAs. L'origine des temps est telle que l'intensité surfacique incidente sur le semi-conducteur est

$$I(z = 0^-, t) = F_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{t^2}{2\delta^2}},$$

où F_0 est la fluence de l'impulsion.

Le semi-conducteur est muni d'une paire d'électrodes, auxquelles il est possible d'appliquer une différence de potentiel V_b . Ces électrodes permettent de polariser le milieu semi-conducteur par un champ électrique statique $\vec{E}_b$. Dans le cas d'un semi-conducteur, une onde lumineuse peut ioniser le matériau et augmenter ainsi le nombre d'électrons et de trous dans le matériau. Ces derniers étant générés simultanément, on parle de paire électron-trou. Dans une description corpusculaire, un photon de fréquence ν pourra être absorbé et créer une paire électron-trou si son énergie est supérieure à une énergie de *bande interdite* E_g , c'est-à-dire l'énergie d'ionisation d'un atome de la maille.

On note R le coefficient de réflexion optique en intensité à l'interface Air-GaAs, et α le coefficient d'absorption linéique optique à $\lambda_0 = 800$ nm défini selon

$$\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = -\alpha I(z, t).$$

Soit une tranche de GaAs de section Σ , d'épaisseur dz , soumise à une onde optique de fréquence ν (telle que $h\nu > E_g$) et d'intensité surfacique I ; alors le nombre de paires électron-trou photogénérées $d^2N(z, t)$ pendant dt est

$$d^2N(z, t) = \alpha \frac{I}{h\nu} \Sigma dz dt.$$

Après avoir été formés, les électrons et les trous peuvent se recombiner dans le matériau, à un taux de recombinaison constant défini selon

$$\left(\frac{1}{n_{\text{el}}} \frac{dn_{\text{el}}}{dt} \right)_{\text{recomb}} = \left(\frac{1}{n_{\text{trou}}} \frac{dn_{\text{trou}}}{dt} \right)_{\text{recomb}} = -\frac{1}{\tau_c},$$

où τ_c est le *temps de recombinaison* des porteurs.

Q22. À partir d'un bilan local, établir l'équation d'évolution de la densité volumique d'électrons $n_e(z, t)$.

Q23. En utilisant la méthode de la variation de la constante donnée en début de sujet (voir équation (2) dans le formulaire), montrer que la densité électronique au cours du temps s'exprime ainsi

$$n_e(z, t) = \alpha \frac{F_0}{h\nu} (1 - R) e^{-\alpha z} e^{\frac{\delta^2}{2\tau_c}} e^{-\frac{t}{\tau_c}} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2\delta}} \left(t - \frac{\delta^2}{\tau_c}\right)\right).$$

Q24. Dans la suite, on se place dans la limite où $\delta \ll \tau_c$. Simplifier $n_e(z, t)$ et tracer son allure en fonction de t .

Ces charges sont accélérées par un champ uniforme et statique $\vec{E}_b = E_b \vec{u}_x$, généré par les électrodes mentionnées précédemment (voir Fig. 5). **On admet** qu'un champ est rayonné par ce mouvement de charge, polarisé selon $\vec{u}_x$ dans cette géométrie, et que l'amplitude $\vec{E}_{\text{ray}}$ de ce champ rayonné est proportionnel à la dérivée temporelle du courant électronique

$$\vec{E}_{\text{ray}} \propto \frac{\partial \vec{j}}{\partial t},$$

dans les régions de l'espace situées à une distance $r \gg \lambda_{\text{ray}}$ de l'interface excitée, où λ_{ray} est la longueur d'onde caractéristique du rayonnement dans le vide.

Q25. Tracer l'allure du profil temporel du champ électrique rayonné (en valeur algébrique), et estimer l'échelle de temps caractéristique du rayonnement émis. Conclure quant à la production d'impulsions térahertz.

Q26. Donner un ordre de grandeur de la longueur d'onde associée au rayonnement émis et comparer sa valeur à la profondeur de pénétration optique de l'impulsion femtoseconde excitatrice dans GaAs.

16). Chirurgie de l'oeil
 • Mesure distance Tumeur
 • Décapage métallique

17) PFD à $1e^-$ $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau}$
 En régime forcé $-im\omega\vec{v} = -e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau}$

d'où $\vec{v} (im\omega - \frac{m}{\tau}) = e\vec{E}$

$$\vec{J} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2\vec{E}}{m(\frac{1}{\tau} - i\omega)} = \sigma\vec{E}$$

$$\text{d'où } \boxed{\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m(\frac{1}{\tau} - i\omega)} = \frac{ne^2\tau}{m(1 - i\omega\tau)}}$$

18) Eq de conservation de la charge:

$$\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

La d'Ohm $\vec{J} = \sigma\vec{E} \rightarrow \sigma \text{div } \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\text{Maxwell: } \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\text{de solution } \rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma t}{\epsilon_0}} \rightarrow 0 \text{ à } t \rightarrow \infty$$

A partir d'un temps $\sim \frac{\epsilon_0}{\sigma}$ on peut considérer $\rho = 0$

(Métal $\sigma \sim 10^7$, $\epsilon_0 \sim 10^{-11} \rightarrow t_p \sim 10^{-18}$)

Rq: si on raisonne en régime forcé $\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ conduit à $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho + i\omega \rho = 0$

soit $\rho(\frac{\sigma}{\epsilon_0} + i\omega) = 0$ donc $\rho = 0$

19) Maxwell: $\text{div } \vec{E} = 0$ ($\rho = 0$)

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0 - \Delta \vec{E}$$

$$\Delta \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

$$\Delta \vec{E} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \mu_0 \sigma i\omega \right) \vec{E} = 0$$

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\mu_0 \sigma c^2}{\omega} \right) \vec{E} = 0$$

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right) \vec{E} = 0$$

$$\epsilon_\lambda = 1 + \frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega} = 1 + \frac{ne^2\tau}{m\epsilon_0(1 - i\omega\tau)\omega}$$

$$\boxed{\epsilon_\lambda = 1 + \frac{i\omega_p^2\tau}{(1 - i\omega\tau)\omega}}$$

AN il reste 3 à on lit σ_0 et n du Cu.

d'où, à partir de $\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$:

$$\tau = \frac{m\sigma_0}{ne^2} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 59,6 \cdot 10^6}{2,5 \cdot 10^{-19} \cdot 8,47 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{8,47 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 1,6 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}$$

$$1 \text{ térahertz} = 10^{12} \text{ Hz} \Rightarrow \omega \sim 10^{13} \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \omega\tau \sim 10^{-1} \Rightarrow 1 - i\omega\tau \approx 1$$

$$\frac{\omega_p^2\tau}{\omega} \sim \frac{10^{16} \cdot 10^{-14}}{10^{13}} \sim 10^5 \gg 1$$

d'où $\epsilon_\lambda \sim i \frac{\omega_p^2\tau}{\omega}$ imaginaire pur

La solution de $\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_\lambda \vec{E} = 0$

conduit à une solution avec atténuation car $i^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$ et E varie en

$$e^{-i(\omega t - kx)} \text{ avec } k = \frac{\omega}{c} \omega_p \sqrt{\frac{\epsilon}{\omega}} \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$$

La partie imaginaire de k est responsable de cette atténuation.

La longueur d'atténuation $\delta \sim \frac{1}{k} = \frac{c\sqrt{2}}{\omega_p \sqrt{\epsilon}}$

$$\delta \sim \frac{3 \cdot 10^8 \sqrt{2}}{\sqrt{10^{13}} \cdot 10^{16} \cdot \sqrt{10^{-14}}} \sim 10^{-7} \text{ m} \sim \frac{1}{10} \mu\text{m}$$

L'onde pénètre très peu dans le cuivre le cuivre est un bon miroir des ondes térahertz.

On des optiques $\sim 10^{15} \text{ Hz} \Rightarrow \omega \sim 10^{15} \text{ à } 10^{16} \text{ rad/s}$
 $\Rightarrow \omega\tau \gg 1 \Rightarrow \epsilon_\lambda \approx 1 + \frac{\omega_p^2\tau}{\omega^2\epsilon} \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

$\epsilon_\lambda \sim 10$ ce qui correspond à un indice $n \sim \sqrt{10}$

On connaît le coefficient de réflexion en énergie par une onde en incidence normale $R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \sim \left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1} \right)^2$ petit $\sim \frac{1}{4}$

Le cuivre ne sera pas un excellent miroir d'ondes optiques.

Ondes UV : $\lambda \ll 10^{-7} \text{ m} \rightarrow \omega \gg \frac{c 2\pi}{\lambda}$

$$\omega \gg 10^{16} \text{ s}^{-1} \Rightarrow \omega \tau \gg 100 \gg 1$$

$$\Rightarrow \epsilon \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \approx 2 \quad R = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right)^2 \text{ est encore plus petit.}$$

Il y aura - bonne réflexion sur le Cu des ondes UV.

D'après les diagrammes fournis, on remarque que la partie réelle de l'indice décrit des U.V aux IR alors que la partie imaginaire croît ce qui est associé à une augmentation du coefficient de réflexion R. Les calculs précédents le confirment.

Pour l'Ag, c'est un peu pareil que Cu. Pour Ag, la réflexion a lieu dès les λ optiques proches de UV.

Le fer a un comportement différent interdisant une bonne réflexion même aux λ optiques proches de IR.

21) Par similitude avec 17)

$$\vec{j} = -n_e e \vec{v}_e + n_{\text{tr}} e \vec{v}_{\text{tr}} = (\sigma_e + \sigma_{\text{tr}}) \vec{E}$$

$$\text{avec } \sigma = \frac{n e^2 \tau}{m} \text{ à TBF}$$

$$\text{soit } \vec{j} = \left(n_e \frac{e \tau_e}{m_e} + n_{\text{tr}} \frac{e \tau_{\text{tr}}}{m_{\text{tr}}} \right) e \vec{E}$$

$$\text{Dans la table 4 on lit } \mu_e / \mu_{\text{tr}} = \frac{9200}{400}$$

donc on peut négliger l'action des trous.

22) Equation de conservation :

$$\underbrace{\frac{dn}{dt} \cdot \Sigma dz}_{\text{variation pendant } dt} = + \underbrace{\frac{\alpha I \Sigma dz dt}{h\nu}}_{\text{formation par le faisceau}} - \underbrace{\frac{1}{\tau} n \Sigma dz dt}_{\text{perte par recombinaison}}$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\alpha I}{h\nu} - \frac{n}{\tau}$$

$$\text{On } \frac{dI}{I} = -\alpha dz \text{ donne par intégration}$$

$$I(z, t) = I(z=0^+, t) e^{-\alpha z}$$

L'énoncé donne $I(z=0^-, t)$ mais pas $I(z=0^+, t)$

On le résultat fait intervenir R coeff de réflexion.

$$I(z=0^+, t) = (1-R) I(z=0^-, t) \quad (2)$$

$$\text{donc } I(z, t) = (1-R) \frac{F_0}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{t^2}{2\delta^2}} e^{-\alpha z}$$

et l'équa. diff. devient :

$$\frac{dn}{dt} + \frac{n}{\tau} = \frac{\alpha (1-R) F_0}{h\nu \sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{t^2}{2\delta^2}} e^{-\alpha z}$$

L'énoncé donne le résultat par variation de la constante ; en adaptant et en prenant $t_0 \rightarrow -\infty$ (pour trouver la fonction erreur définie dans l'énoncé)

$$n = n_0 e^{-\frac{\alpha z}{\tau}} + \int_{-\infty}^t \frac{\alpha F_0 (1-R)}{h\nu \sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{t'^2}{2\delta^2}} e^{-\alpha z} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt'$$

Pour retrouver $\int e^{-u^2} du$ indiqué dans l'énoncé, par définition erf, arrangeons l'exponentielle

$$e^{-\frac{t'^2}{2\delta^2} + \frac{t-t'}{\tau}} = e^{-\frac{1}{2\delta^2} \left(t' - \frac{\delta^2}{\tau} \right)^2 + \frac{\delta^2}{2\tau^2} - \frac{t}{\tau}}$$

$$= e^{\frac{\delta^2}{2\tau^2} - \frac{t}{\tau}} e^{-u^2}$$

$$\text{avec } u = \frac{1}{\sqrt{2}\delta} \left(t' - \frac{\delta^2}{\tau} \right) \quad du = \frac{1}{\sqrt{2}\delta} dt'$$

$$\text{alors } n = \frac{\alpha F_0 (1-R)}{h\nu \sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\alpha z + \frac{\delta^2}{2\tau^2} - \frac{t}{\tau}} \sqrt{2\pi\delta^2} \text{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2}\delta} \left(t - \frac{\delta^2}{\tau} \right) \right)$$

$$\text{soit } n = \alpha \frac{F_0 (1-R)}{h\nu} e^{-\alpha z + \frac{\delta^2}{2\tau^2} - \frac{t}{\tau}} \text{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2}\delta} \left(t - \frac{\delta^2}{\tau} \right) \right) \quad (OK)$$

24) Quand $\delta \ll \tau_c$ $t - \frac{\delta^2}{\tau_c} \sim t$

$$n_e(z, t) \approx \frac{\alpha F_0 (1-R)}{h\nu} e^{-\alpha z} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{erf} \left(\frac{t}{\sqrt{2}\delta} \right)$$

La courbe de la fonction erf est donnée par $\frac{t}{\sqrt{2}\delta} \in [-4; 4]$

Choisissons $\tau_c = 100\delta$ ($\tau_c \gg \delta$)

$\frac{t}{\sqrt{2}\delta}$	-4	-2	-1	0	1	2	3	4
erf($\frac{t}{\sqrt{2}\delta}$)	0.0	0.1	0.5	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$e^{-\frac{t}{\tau}}$		1	1	0.98				0.94

$$\left(\frac{t}{\tau} = \frac{t}{\sqrt{2}\delta} \frac{\sqrt{2}\delta}{\tau} = \frac{t}{\sqrt{2}\delta} \frac{\sqrt{2}}{100} \right)$$

$$n_e \quad 0 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0.5 \quad 0.98 \quad 0.986 \quad 0.98$$

(au facteur $\alpha \frac{F_0 (1-R)}{h\nu} e^{-\alpha z}$ près)



25) $f = -ne\psi$ donc $\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial n}{\partial t} e\psi$

en admettant v constant ! mais je vois mal comment faire autrement.

L'énoncé ne donne rien sur la dérivée de la fonction erf. J'estime cette dérivée par l'allure de la courbe $n(t/\sqrt{\epsilon\delta})$.

Elle est nulle quasiment partout sauf pour $t/\sqrt{\epsilon\delta} \in [0, 0.5]$.

E_{ray} apparaît dans cet intervalle de temps.

d'où une durée caractéristique d'environ $\sqrt{\epsilon\delta}$

Enoncé : $\delta = 100 \text{ fs} \rightarrow \sqrt{\epsilon} \cdot 10^{-13} \text{ s}$

on a bien des impulsions $\sim \frac{10^{13}}{\sqrt{\epsilon}} \text{ Hz}$
cà d du térahertz.

26) $\lambda = \frac{c}{f} = c\delta\sqrt{\epsilon} = 4 \cdot 10^{-5} = 40 \mu\text{m}$

table 4 on lit $\alpha = 6000 \text{ cm}^{-1} = 6 \cdot 10^{-1} \mu\text{m}^{-1}$
soit $\frac{1}{\alpha} = 1,7 \mu\text{m}$ donc $\lambda \gg \frac{1}{\alpha}$

32) $\Pi_{e \rightarrow i} = \gamma (T_e - T_i)$ fait penser au terme de conducto-convection mais il est ici volumique.