

*On considère une corde métallique, homogène, cylindrique et sans raideur torsionnelle. Le poids est toujours négligé.*

Les mouvements transversaux de cette corde sont repérés par la variable  $y$  (figure 1) fonction de l'abscisse  $x$  et du temps  $t$ .

Caractéristiques de la corde :  
diamètre :  $d$   
masse linéique :  $\mu$   
masse volumique du métal :  $\rho$   
force de tension :  $F$

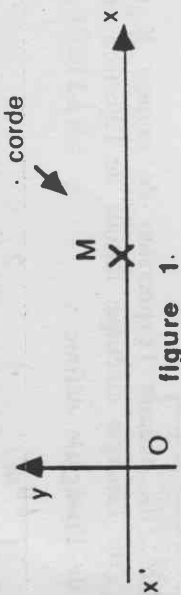


figure 1.

N. B. Les deux parties sont largement indépendantes.

### 1. ONDE PROGRESSIVE

Lorsque la corde est excitée transversalement, un point M quelconque d'abscisse  $x$  a un mouvement transversal décrit par  $y(x,t)$  tel que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1)$$

l'équation (1) soit satisfaite :

$$y(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (2)$$

1.a) Montrer que la combinaison linéaire est la solution générale de (1) à condition que les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  soient deux fois dérivables et que le paramètre  $c$  ait une valeur particulière que l'on calculera.

b) Interpréter physiquement les 2 fonctions  $f_1$  et  $f_2$  ainsi que le paramètre  $c$ .

2. La corde est maintenant limitée au demi-axe  $Ox$  infini (figure 2) et on place en O un vibreur sinusoïdal de fréquence  $N$  communiquant à la corde un mouvement transversal en émettant une onde progressive se propageant selon les  $x$  croissants et dont l'élongation au point O est :

$$y(O,t) = a \sin \omega t \quad (\omega = 2\pi N) \quad (3)$$

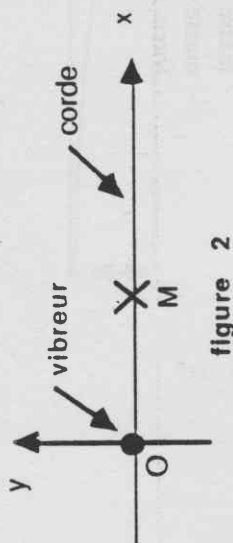


figure 2

a) Déterminer les fonctions  $f_1(x,t)$  et  $f_2(x,t)$  dans ce cas là.

On posera :  $k = \frac{\omega}{c}$ .

b) Soient  $T$  et  $\lambda$  les périodes temporelle et spatiale du phénomène. Calculer ces deux grandeurs et représenter l'aspect de la corde à l'instant  $t = 5,7 \cdot 10^{-3}$  s. si  $N = 440$  Hz ;  $d = 1$  mm ;  $a = 1$  mm ;  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  kg.m<sup>-3</sup> ;  $F = 427$  N.

On prendra comme échelle : en abscisse : 1 cm = 15 cm ; en ordonnée : 1 cm = 1 mm.

c) Quels sont les phénomènes qui viennent perturber la description idéale ci-dessus ? Faire éventuellement un commentaire.

### 2. MODES PROPRES D'UNE CORDE

La corde est maintenant fixée en O et en un point A d'abscisse

$OA = \ell$  (figure 3) :

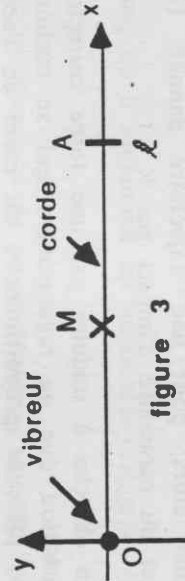


figure 3

En O est placé un vibreur sinusoïdal de fréquence  $N$  communiquant à la corde un mouvement transversal d'équation horaire :  $y(O,t) = a \sin \omega t$  (3)  
N.B. : On utilisera de préférence la notation complexe :  $y(O,t) = a e^{j\omega t}$  (4)

3.a) Montrer que, quels que soient  $R$  et  $R'$ , il existe des valeurs de  $\varphi$  pour lesquelles  $E$  est maximum et d'autres pour lesquelles  $E$  est minimum. Quelles sont les valeurs de  $x$  correspondantes en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ ?

b) Déduire les valeurs  $\mathcal{V} = E_{\max}$  et  $\mathcal{X} = E_{\min}$  en fonction de  $a$ ,  $R$ ,  $R'$ , et  $\Phi$ .

c) Pour quelles valeurs de  $\Phi$ ,  $\mathcal{V}$  est-il maximum ? Comment s'appelle ce phénomène ? En déduire en fonction de  $n$ ,  $c$  et  $\mathcal{L}$  la suite  $N_n$  ( $n$  entier positif) des fréquences propres de la corde.

$\mathcal{V}$  étant supposé maximum, calculer numériquement  $\sqrt{\mathcal{V}}$  et  $\sqrt{\mathcal{X}}$  pour  $a = 1 \text{ mm}$  et  $R = R' = 0,95$ .

4. On suppose maintenant que  $R = R'$  et on pose  $m = \frac{2R}{1-R^2}$ .

a) Exprimer  $Z = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}_{\max}}$  et représenter sommairement  $Z$  en fonction de  $\Phi$ .

5. Dans cette question  $R = R' = 0,95$ ;  $\mathcal{L} = 30 \text{ cm}$ ;  $c = 264 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\Phi$  est voisin de  $n\pi$  ( $n$  entier  $> 0$ ).

a) Evaluer en fonction de  $R$  la largeur  $\Delta\Phi$  de l'intervalle des valeurs de  $\Phi$  pour lequel  $Z \geq \frac{1}{2}$ ; en déduire l'intervalle de fréquence  $\Delta N$  correspondant.

b) Exprimer le facteur de qualité  $Q_n$  de la corde en fonction de  $R$ ,  $n$ .  
c) Dans le cas où  $n = 1$ , calculer  $Q_1$ . Commenter.

\*\*\* FIN \*\*\*

L'onde incidente émise par le vibreur se propage suivant  $Ox$  et se réfléchit en  $A$ . Cette réflexion affecte l'amplitude et la phase de l'onde. Le même phénomène se produit en  $O$ . On note  $r$  et  $r'$  les coefficients de réflexion pour l'amplitude respectivement en  $A$  et en  $O$ :

$$r = R e^{j\psi} \text{ et } r' = R' e^{j\psi'} \text{ avec } R, R' \in \mathbb{R} \quad 0 \leq R, R' \leq 1$$

On posera pour simplifier l'écriture  $\varphi = kx$  et  $\Phi = k\mathcal{L}$  où  $k$  est le nombre d'onde défini en I.

1.a) Donner l'expression de l'amplitude complexe  $\mathcal{A}_p^+(\varphi)$  de l'onde se dirigeant de  $O$  vers  $A$  après avoir subi  $p$  réflexions en chacun des points  $A$  puis  $O$  ( $p \geq 0$ ; expliciter la valeur pour  $p = 0$ ).

Donner de même l'expression de l'amplitude complexe  $\mathcal{A}_p^+(\varphi)$  de l'onde se dirigeant de  $A$  vers  $O$  après avoir subi  $p$  réflexions en chacun des points  $O$  puis  $A$  ( $p \geq 0$ ; expliciter la valeur pour  $p = 0$ ).

(pt) en  $A$

b) Déterminer la valeur de  $\psi$  sachant que :  $\mathcal{A}_p^+(\Phi) = -R \mathcal{A}_p^-(\Phi)$ . Donner une interprétation physique de ce résultat.

2.a) Donner l'expression de l'amplitude complexe résultante en  $M$  :  $\mathcal{A}(\varphi)$   
$$\mathcal{A}(\varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} \mathcal{A}_p^-(\varphi) + \sum_{p=0}^{\infty} \mathcal{A}_p^+(\varphi)$$
 puis en fonction des divers paramètres décrivant le phénomène :  $a$ ,  $R$ ,  $R'$ ,  $\varphi$  et  $\Phi$ .

On donnera à  $\psi$  la valeur trouvée en 2.1b) et on supposera que  $\psi' = \psi$ .

On rappelle que si  $q$  est un nombre complexe de module  $|q| < 1$  on a  
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = (1-q)^{-1}$$

b) En déduire l'expression du carré du module de  $\mathcal{A}$ , soit :  $E = \|\mathcal{A}\|^2$ , en faisant apparaître les quantités :  $\sin^2 \Phi$  et  $\sin^2 (\Phi - \varphi)$



2.1b) Pour que  $t_p^+(\phi) = -R t_p^-(\phi)$  il faut que (après simplification)  
 $1 = -e^{j(\psi - 2\phi + 2\varphi)}$  avec  $\varphi = \phi$   
 soit  $1 = e^{-j\psi}$  donc  $\boxed{\psi = \pi}$

(Il y a un changement de signe sur l'amplitude de l'onde quand elle se réfléchit.)

$$\begin{aligned} 2.2a) \quad t(\varphi) &= \sum_{p=0}^{\infty} (t_p^-(\varphi) + t_p^+(\varphi)) \\ \sum_{p=0}^{\infty} t_p^-(\varphi) &= \sum_{p=0}^{\infty} a R^p R' e^{j(\omega t + p\psi + p\psi' - 2p\phi - \varphi)} \\ &= a e^{j(\omega t - \varphi)} \sum_{p=0}^{\infty} R^p R' e^{j p(\psi + \psi' - 2\phi)} \end{aligned}$$

hyp:  $\psi' = \psi$  et on a montré que  $\psi = \pi$

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} t_p^-(\varphi) &= a e^{j(\omega t - \varphi)} \sum_{p=0}^{\infty} (R R' e^{2j(\pi - \phi)})^p \\ &= a e^{j(\omega t - \varphi)} \sum_{p=0}^{\infty} (R R' e^{-2j\phi})^p \\ &= a e^{j(\omega t - \varphi)} \frac{1}{1 - R R' e^{-2j\phi}} \end{aligned}$$

$$\text{de m} \quad \sum_{p=0}^{\infty} t_p^+(\varphi) = a e^{j(\omega t + \varphi - 2\phi + \varphi)} R \sum_{p=0}^{\infty} (R R' e^{-2j\phi})^p$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} t_p^+(\varphi) = -a e^{j(\omega t - 2\phi + \varphi)} R \frac{1}{1 - R R' e^{-2j\phi}}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{t(\varphi) = \frac{a e^{j(\omega t - \varphi)}}{1 - R R' e^{-2j\phi}} (1 - R e^{-2j\phi + 2j\varphi})}$$

$$2.2b) \quad E = \|t\|^2 = a^2 \frac{1 - R e^{-2j(\phi - \varphi)}}{1 - R R' e^{-2j\phi}} \cdot \frac{1 - R e^{+2j(\phi - \varphi)}}{1 - R R' e^{+2j\phi}}$$

$$E = a^2 \frac{1 + R^2 - 2R \cos 2(\phi - \varphi)}{1 + R^2 R'^2 - 2R R' \cos \phi}$$

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$$

$$\rightarrow \boxed{E = a^2 \frac{(1-R)^2 + 4R \sin^2(\phi - \varphi)}{(1 - R R')^2 + 4R R' \sin^2 \phi}}$$

2.3a)  $E_{\max}$  si  $\sin^2(\phi - \varphi) = 1$   
 $E_{\min}$  si  $\sin^2(\phi - \varphi) = 0$

donc  $E_{\max}$  pour  $\phi - \varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2}$   
 soit  $k(l-x) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

or  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  donc  $l-x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$

$$\boxed{E_{\max} \text{ si } x = l - (2n+1)\frac{\lambda}{4}}$$

$$\boxed{E_{\min} \text{ si } x = l - \frac{2n\lambda}{4} = l - \frac{n\lambda}{2}}$$

$$2.3b) \quad V = E_{\max} = a^2 \frac{(1-R)^2 + 4R}{(1 - R R')^2 + 4R R' \sin^2 \phi}$$

$$N = E_{\min} = a^2 \frac{(1-R)^2}{(1 - R R')^2 + 4R R' \sin^2 \phi}$$

2.3c)  $V$  est max pour  $\sin^2 \phi = 0$  c-à-d  $\phi = n\pi$   
 soit  $k l = n\pi$  c-à-d  $\frac{2\pi l}{\lambda} = n\pi$

$$\boxed{V \text{ est max pour } l = \frac{n\lambda}{2}}$$

Il s'établit des ondes stationnaires

on a donc  $\lambda = \frac{2l}{n}$

Comme  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$  }  $\Rightarrow \frac{2l}{n} = \frac{2\pi c}{\omega}$

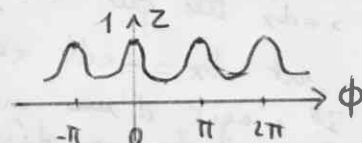
$\omega = 2\pi N$  donc  $\boxed{N = \frac{n c}{2l}}$

$$\sqrt{V}_{\max} = a \frac{(1+R)}{1 - R R'} = 10^{-3} \frac{1 + 0,95}{1 - 0,95^2} = 20 \text{ mm}$$

$$\sqrt{N} = a \frac{(1-R)}{1 - R R'} = 10^{-3} \frac{1 - 0,95}{1 - 0,95^2} = 0,51 \text{ mm}$$

$$2.4a) \quad Z = \frac{(1 - R R')^2}{(1 - R R')^2 + 4R R' \sin^2 \phi} \stackrel{(R=R')}{=} \frac{(1 - R^2)^2}{(1 - R^2)^2 + 4R^2 \sin^2 \phi}$$

$$\boxed{Z = \frac{1}{1 + m^2 \sin^2 \phi}}$$



2.4b) Si  $R \rightarrow 1$  alors  $m \rightarrow \infty$

2.5a)  $Z > \frac{1}{2} \Leftrightarrow Z > \frac{1}{1 + m^2 \sin^2 \phi} \Leftrightarrow \sin^2 \phi < \frac{1}{m^2}$

hyp  $\phi = n\pi$   $|\sin \phi| < \frac{1}{m}$

Prends  $n=0$  alors  $\sin \phi = \phi$  donc  $|\phi| < \frac{1}{m}$

Ainsi  $\Delta \phi = \frac{2}{m} = \frac{1 - R^2}{R}$

$\phi = k l = \frac{\omega l}{c} = \frac{2\pi N l}{c}$

$$2.5b) \quad \boxed{Q_n = \frac{N}{\Delta N} = \frac{n R \pi}{1 - R^2}}$$

2.5c)  $n=1 \quad Q_1 = \frac{R \pi}{1 - R^2} = \frac{0,95 \pi}{1 - 0,95^2} = 30$

assez bon facteur de qualité.