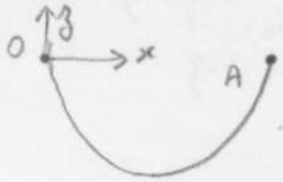
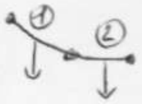
Ecole Air PC 01

I 1)

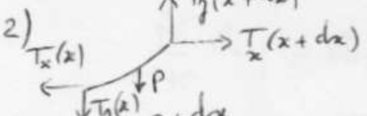


Au repos un petit élément ① de corde est soumis à 3 forces son poids et les 2 tensions qui tirent à ses 2 extrémités. Les 3 forces sont coplanaires. Il en est de même pour le morceau de corde suivant ②. Comme le poids est toujours vertical, cela veut dire que la tension à l'extrémité de ② est dans le même plan que les 3 forces agissant sur ①.



La corde est donc dans le plan Oxz.

2)



Comme composante horizontale, seule T_x intervient.

Au repos on a donc $T_x(x+dx) = T_x(x)$

$T_x(M)$ est bien indépendant de M

TCI en projection verticale : $T_z(x+dx) - T_z(x) = P$

Avec $P = \delta m g$ et $\delta m = \mu\, ds$

$\rightarrow \frac{\partial T_z}{\partial x} dx = \mu\, ds\, g$

T_z n'étant fonction que de z $\frac{\partial T_z}{\partial x} = \frac{dT_z}{dx}$

$\rightarrow \boxed{\frac{dT_z}{dx} dx = \mu g\, ds}$ ou $\boxed{dT_z = \mu g\, ds}$

3 a) $\begin{cases} T_x = T\cos\alpha = T\frac{dx}{ds} \\ T_z = T\sin\alpha = T\frac{dz}{ds} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{T_z}{T_x} = f}$

T_z

$\frac{\mu g}{T_x}$

$\frac{df}{dx} = \frac{1}{T_x}\frac{dT_z}{dx}$ car T_x est constant

$= \frac{1}{T_x}\mu g \frac{ds}{dx}$ d'après 2)

$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1+f^2}$

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \frac{1}{T_x}\mu g\sqrt{1+f^2}}$$

3) b) Séparer les variables f et x : ①

$\frac{df}{\sqrt{1+f^2}} = \frac{\mu g}{T_x} dx$

$\text{Argsh}\, f = \frac{\mu g}{T_x} x + ct$

Condition :

en $x = \frac{a}{2}$ on a $f = \frac{dz}{dx} = 0$

d'où $0 = \frac{\mu g}{T_x}\frac{a}{2} + ct \rightarrow ct = -\frac{\mu g}{T_x}\frac{a}{2}$

$\text{Argsh}\, f = \frac{\mu g}{T_x}\left(x - \frac{a}{2}\right)$ ou $\boxed{f = \text{sh}\left[\frac{\mu g}{T_x}\left(x - \frac{a}{2}\right)\right]}$

3c) $f = \frac{dz}{dx} = \text{sh}\left[\frac{\mu g}{T_x}\left(x - \frac{a}{2}\right)\right]$

Integrons : $z = \text{ch}\left[\frac{\mu g}{T_x}\left(x - \frac{a}{2}\right)\right] \cdot \frac{1}{\frac{\mu g}{T_x}} + ct$

$$\boxed{z = \frac{T_x}{\mu g}\left[\text{ch}\,\frac{\mu g}{T_x}\left(x - \frac{a}{2}\right) - \text{ch}\,\frac{\mu g a}{2 T_x}\right]}$$ car $z = 0$ pour $x = 0$

$$\boxed{A = \frac{\mu g a}{2 T_x}}$$

4) On a $ds = dx\sqrt{1+f^2}$ avec f trouvé en 3) b) $\rightarrow ds = dx\underbrace{\sqrt{1 + \text{sh}^2\left(\frac{\mu g}{T_x}\left(x - \frac{a}{2}\right)\right)}}_{\text{ch}^2\left(\frac{\mu g}{T_x}\left(x - \frac{a}{2}\right)\right)}$

$ds = dx \cdot \text{ch}\left(\frac{\mu g}{T_x}\left(x - \frac{a}{2}\right)\right)$

$L = 2\int_{x=0}^{\frac{a}{2}} dx \cdot \text{ch}\left(\frac{\mu g}{T_x}\left(x - \frac{a}{2}\right)\right) = \frac{2T_x}{\mu g}\left[\text{sh}\left(\frac{\mu g}{T_x}\left(x - \frac{a}{2}\right)\right)\right]_0^{\frac{a}{2}}$

$$\boxed{L = \frac{2T_x}{\mu g}\,\text{sh}\,\frac{\mu g a}{2 T_x}}$$

5) AN T_x apparaît 2 fois $\frac{L\mu g}{2}\frac{1}{T_x} = \text{sh}\left(\frac{\mu g a}{2}\cdot\frac{1}{T_x}\right)$

Graphiquement traçons $\frac{L\mu g}{2} X$ en fonction de $X = \frac{1}{T_x}$ et $\text{sh}\,\frac{\mu g a}{2} X$

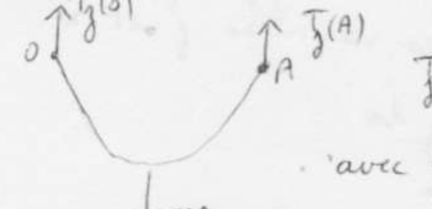
$\boxed{\mu = \rho S}$

$\frac{L\mu g}{2} = \frac{10 \times 7870 \cdot 10^{-4} \cdot 9{,}81}{2} = 38{,}6$

$\frac{\mu g a}{2} = \frac{7870 \cdot 10^{-4} \cdot 9{,}81 \times 6}{2} = 23{,}1$

Par approches successives on trouve

$T_x \simeq 13\,N$



$T_y(A) = T_y(0) = \frac{mg}{2}$

avec $m = \rho S L$

$T_y(A) = T_y(0) = \frac{7870\times 10^{-4}\times 10\times 9{,}81}{2} = 38{,}6$ N

$T_x(A) = T_x(0) = 13$ N

$\underline{T = \sqrt{T_x^2(A) + T_y^2(A)} \cong 40\text{N}}$

C'est faisable par un homme

Point le plus bas en $x = \frac{a}{2}$

cf 3) c) $y = \frac{T_x}{\mu g}\left[1 - \mathrm{ch}\frac{\mu g a}{2T_x}\right]$

$y = \frac{13}{7870\times 10^{-4}\times 9{,}81}\left[1 - \mathrm{ch}\frac{7870\times 10^{-4}\times 9{,}81\times 6}{2\times 13}\right]$

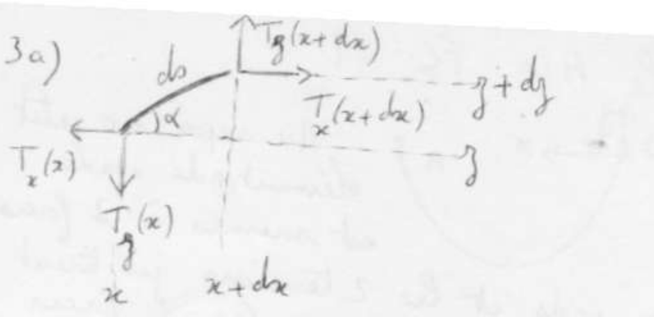
$\underline{y = -3{,}5\text{ m.}}$

II Rq préliminaire : Si on garde la même corde et les 2 points d'accrochage, sachant que le point le plus bas est à l'équilibre à 3,5 m en-dessous des points d'accrochage, cela signifie que "rectiligne" ou "pesanteur négligée" est une grosse approximation !

1) On ne peut négliger le poids que devant la tension qui doit être très grande pour pouvoir la tendre horizontalement.

2) Petits mouvements et corde quasi-horizontale donc $\boxed{ds \simeq dx}$

3a)



TCI projeté sur x : $T_x(x+dx) - T_x(x) = 0$

donc $\boxed{T_x = cte}$

3b)

TCI projeté sur y : (pesanteur négligée)

$T_y(x+dx) - T_y(x) = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ $(ds \simeq dx)$

$\frac{\partial T_y}{\partial x}dx = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

avec $T_y = T\sin\alpha \simeq T\tan\alpha$ pour $\alpha \ll 1$

et $\tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$

T étant constant $T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

soit $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ avec $\boxed{c^2 = \frac{T}{\mu}}$

Analyse dimensionnelle : $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \sim c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

donc $\frac{1}{t^2} \sim \frac{c^2}{x^2}$ soit $c \sim \frac{x}{t} \sim$ vitesse

<u>c est une vitesse</u> : c est la vitesse de propagation de l'onde

4) Soit $f(x-ct) = y$ alors $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial t}$

c-à-d $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial(x-ct)}\times(-c)$; de même $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial(x-ct)^2}\times(-c)^2$

soit $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial(x-ct)^2}$

De même $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial(x-ct)}\times 1$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial(x-ct)^2}\times 1^2$

soit $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial(x-ct)^2}$

On a bien alors $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial(x-ct)^2} - c^2\frac{\partial^2 y}{\partial(x-ct)^2} = 0$

Donc $f(x-ct)$ vérifie bien l'équation 3b)

De même pour $g(x+ct)$ où on aurait

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial(x+ct)^2}\times c^2$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial(x+ct)^2}\times 1^2$

$f(x-ct)$ se reproduit en $x+dx$ à $t+dt$ si

$x - ct = x + dx - c(t+dt)$ c-à-d si $dx = c\,dt$

L'amplitude de l'onde produite en x à t se reproduit en $x+dx$ à un instant plus tard dt, tel que $dx = c\,dt$, comme si cette amplitude se déplaçait à la vitesse c dans le sens des x croissant.

Pour $g(x+ct)$: $x+ct = x+dx+c(t+dt)$
pour $dx = -c\,dt$

g caractérise une onde qui progresse à la vitesse c dans le sens des x décroissant.

5 a) La vitesse transversale est $\frac{\partial y}{\partial t}$

Par multiplication avec l'équation d'onde :

$$\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

De plus $\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$

Calculons comme demandé par l'énoncé $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

On retrouve le terme de droite de l'équat d'onde

$$\rightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = c^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

Or $\frac{\partial}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial t \partial x}$ donc $\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$

soit $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + c^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\right)$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{c^2}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$c^2 = \frac{T}{\mu}$ Multiplions par μ

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\underbrace{\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}_{\text{énergie cinétique linéique}} + \underbrace{\frac{T}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}_{\text{énergie potentielle linéique}}\right) = T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$\boxed{e_p = \frac{T}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$

En accord avec la conservation de l'énergie locale

$$\frac{\partial}{\partial t}u = -\operatorname{div}\vec{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$$

On a $\boxed{\vec{\Pi} = -T\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\vec{e}_x}$

b) Le travail ou mieux la puissance de $\vec{T}$ est $\vec{T}\cdot\vec{v}$. Le mouvement étant $\vec{v} = \frac{\partial y}{\partial t}\vec{e}_y$

on a $\vec{T}\cdot\vec{v} = T_y\frac{\partial y}{\partial t} = T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}$

La variation de puissance de $\vec{T}$ entre x et $x+dx$ de la corde est donc

$$d\left(T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right)dx$$

Si cette variation est positive, c'est que le morceau de corde entre x et $x+dx$ a cédé de l'énergie par unité de longueur $\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right)$

C'est le terme de $\operatorname{div}\vec{\Pi}$, le signe $-$ traduisant la perte d'énergie du morceau de corde

6a) Corde fixée aux 2 bouts : $\boxed{y(x=0,t)=0}$ $\boxed{y(x=L,t)=0}$

6b) Alors $\boxed{\underline{A} + \underline{B} = 0}$ soit $\underline{B} = -\underline{A}$

et $\underline{A}\,e^{-j\frac{L\omega}{c}} - \underline{A}\,e^{j\frac{L\omega}{c}} = 0$ soit $\sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) = 0$

valable si $\frac{L\omega}{c} = n\pi$ n entier

$\boxed{\omega_n = n\frac{\pi c}{L}}$ ou $\boxed{f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2L}}$

On ne peut pas obtenir plus sur $\underline{A}$

$$y(x,t) = \underline{A}\,e^{j\omega t}\left[e^{-j\frac{x\omega}{c}} - e^{j\frac{x\omega}{c}}\right]$$

$\boxed{y(x,t) = -\underline{A}\,2j\sin\frac{\omega x}{c}\,e^{j\omega t}}$

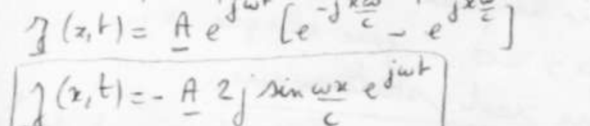
$\boxed{y(x,t) = 2A\sin\frac{\omega x}{c}\sin\omega t}$ en imaginant $\underline{A}$ réel

Il s'agit d'une onde stationnaire car les parties spatiale et temporelle sont découplées. Les noeuds (lieux où $y=0$) n'évoluent pas géographiquement. Ils sont à des endroits précis de la corde

6c) f_1 se nomme fréquence fondamentale, les autres sont les harmoniques

6d) $n = 3 \rightarrow y = 2A\sin\frac{3\pi c}{L}\sin\omega t$

on a 3 fuseaux visibles



La corde vibre sur place entre la courbe en trait plein correspondant à $\sin\omega t = 1$ et la courbe en pointillés correspondant à $\sin\omega t = -1$

7a) En un point x de la corde, la densité d'énergie $u = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{T}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$

avec $y = 2A\sin\frac{\omega x}{c}\sin\omega t$ cela donne :

$$u = \frac{1}{2}\mu\omega^2 4A^2\sin^2\frac{\omega x}{c}\cos^2\omega t + \frac{T}{2}\frac{\omega^2}{c^2}4A^2\cos^2\frac{\omega x}{c}\sin^2\omega t$$

Sur toute la corde, il s'agit d'intégrer $\sin^2\frac{\omega x}{c}$ et $\cos^2\frac{\omega x}{c}$ entre 0 et L

$$\int_0^L \sin^2\frac{\omega x}{c}\,dx = \int_0^L\left(1-\cos\frac{2\omega x}{c}\right)dx = L$$

de même $\int_0^L \cos^2\frac{\omega x}{c}\,dx = L$

donc $U = \frac{1}{2}\mu\omega^2 4A^2 L\cos^2\omega t + \frac{T}{2}\frac{\omega^2}{c^2}4A^2\sin^2\omega t$

Or $c^2 = \frac{T}{\mu}$ donc finalement : $(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1)$

$\boxed{U = \mu\omega^2 4A^2 L}$ proportionnelle au carré de la fréquence

7b) Le transport de l'énergie est décrit par $\Pi = -T\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}$

Pour l'onde stationnaire $y = 2A\sin\frac{\omega x}{c}\sin\omega t$

$\Pi = -T\frac{\omega^2}{c}(2A)^2\cos\frac{\omega x}{c}\cos\omega t\sin\frac{\omega x}{c}\sin\omega t$

La moyenne temporelle de $\cos\omega t\sin\omega t$ est nulle

Donc $\langle\Pi\rangle = 0$ pour chaque x.

<u>L'énergie reste stationnaire</u>

on remarque que $e_c = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$ en $\cos^2\omega t\sin^2\frac{\omega x}{c}$ est nulle aux noeuds de vibration

alors que $e_p = \frac{T}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ en $\sin^2\omega t\cos^2\frac{\omega x}{c}$ est max

8) Il faut que $\mu g\,dx \ll \frac{\partial T_y}{\partial x}dx$ pour pouvoir négliger le poids sur l'effet résultant de la composante verticale de T

$\mu g\,dx \ll T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx \rightarrow \boxed{\mu g \ll T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$

Avec $y = 2A\sin\frac{\omega x}{c}\sin\omega t$, $\mu g \ll T2A\frac{\omega_1^2}{c^2}$

$\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$, $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ $\rightarrow$ $\mu g \ll \mu 2A\frac{\pi^2 T}{\mu L^2}$

$$\boxed{2A \gg \frac{\mu g L^2}{\pi^2 T}}$$

2A est l'amplitude des oscillations de la corde aux ventres : $A_c = \frac{\mu g L^2}{\pi^2 T}$

AN μ linéique $= \rho_{volumique}\times\pi\left(\frac{\phi}{2}\right)^2$
$= \rho_{eau}\cdot d_{densité}\times\pi\left(\frac{\phi}{2}\right)^2$ ϕ diamètre

$\underline{A_c} = \frac{7870\times\pi\cdot(0{,}15\times10^{-3})^2\times9{,}8\times0{,}64^2}{\pi^2\times100} = \underline{2{,}3\ \mu m}$

$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{2\times0{,}64}\sqrt{\frac{100}{7870\cdot\pi(0{,}15\times10^{-3})^2}}$ (4)

$\underline{f_1 = 330\ Hz}$

Commentaire : l'amplitude critique est très petite. On est assuré d'obtenir des amplitudes plus élevées correspondant ainsi à un poids négligeable

III 1) <u>Transmise</u> : $\boxed{\underline{y_t} = \underline{A_t}\,e^{j\omega\left(t-\frac{x}{c_2}\right)}}$

<u>Réfléchie</u> : $\boxed{\underline{y_r} = \underline{A_r}\,e^{j\omega\left(t+\frac{x}{c_1}\right)}}$

La pulsation ω est préservée pour assurer la continuité de l'onde en $x=0^-$ et $x=0^+$ à tout instant.

III 2) La continuité est : $(y_i + y_r)(x=0^-) = y_t(x=0^+)$

d'où $\boxed{\underline{A_i} + \underline{A_r} = \underline{A_t}}$ qui traduit la continuité de la corde

Y a t'il continuité de la dérivée en x=0 ? (c.à.d discontinuité ou non de pente), Sans doute non car en x=0 il n'y a pas de masse (la corde n'est pas lestée précisément en ce point). La force qui tire à droite est donc égale et opposée à la force qui tire à gauche. Au niveau de leurs composantes on peut donc écrire :

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^-} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0^+}$$

Ainsi : $\boxed{-\frac{1}{c_1}(\underline{A_i} - \underline{A_r}) = -\frac{1}{c_2}\underline{A_t}}$

III 3) Résoudre le système ⟹

$\boxed{\underline{A_r} = \underline{A_i}\,\frac{\frac{c_2}{c_1}-1}{\frac{c_2}{c_1}+1}}$ $\boxed{\underline{A_t} = \underline{A_i}\,\frac{2\frac{c_2}{c_1}}{\frac{c_2}{c_1}+1}}$

Coef^t de réflexion : $\boxed{r = \frac{\underline{A_r}}{\underline{A_i}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}-1}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}+1}}$ (avec $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$)

Coef^t de transmission : $\boxed{t = \frac{\underline{A_t}}{\underline{A_i}} = \frac{2\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}+1}}$

Cas $\mu_1 = \mu_2$: $r = 0$ pas de réflexion (normal)
Cas $\mu_1 \gg \mu_2$: $r = 1$ réflexion (sur corde légère)
Cas $\mu_1 \ll \mu_2$: $r = -1$ réflexion avec changement de signe (sur grosse chaîne)

III 4 a) $x<0$ $y = y_i + y_r$ avec $\underline{A_i} \doteq A$
$x>0$ $y = y_t$

$x<0$ $\quad y = A e^{j\omega(t-\frac{x}{c_1})} + r A e^{j\omega(t+\frac{x}{c_1})}$

$$y = A e^{j\omega t}\left(e^{-j\frac{x\omega}{c_1}} + r e^{j\frac{x\omega}{c_1}}\right)$$

Si on veut faire apparaître un terme stationnaire il nous faut arranger les exponentielles de manière à faire apparaître $\cos\frac{x\omega}{c_1}$: $y = Ae^{j\omega t}\left(e^{-j\frac{x\omega}{c_1}} + r\left(e^{j\frac{x\omega}{c_1}} + e^{-j\frac{x\omega}{c_1}}\right) - re^{-j\frac{x\omega}{c_1}}\right)$

soit $y = Ae^{j\omega t}\left(e^{-j\frac{x\omega}{c_1}}(1-r) + r\, 2\cos\frac{x\omega}{c_1}\right)$

$x<0$ $\boxed{y = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c_1}\right)(1-r) + \underbrace{2rA\cos\frac{\omega x}{c_1}\cos\omega t}}$

onde progressive d'amplitude $A(1-r)$ — onde stationnaire d'amplitude $2rA$

$x>0$ $\quad y = tA\, e^{j(\omega t - \frac{x}{c_2})}$

$x>0$ $\boxed{y = tA\cos\left(\omega t - \frac{x}{c_2}\right)}$ onde progressive d'amplitude tA

III 4 b) $e_p = \frac{T}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ $\quad T$ est continue et $\frac{\partial y}{\partial x}$ aussi donc e_p est continue

$e_c = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$ $\quad \frac{\partial y}{\partial t}$ est continue mais pas μ donc e_c est discontinue

L'énergie mécanique $e_p + e_c$ n'est pas continue

onde incidente $\vec{\Pi}_i = -T\frac{\partial y_i}{\partial t}\frac{\partial y_i}{\partial x}\vec{e}_x$

onde réfléchie $\vec{\Pi}_r = -T\frac{\partial y_r}{\partial t}\frac{\partial y_r}{\partial x}(-\vec{e}_x)$

onde transmise $\vec{\Pi}_t = -T\frac{\partial y_t}{\partial t}\frac{\partial y_t}{\partial x}\vec{e}_x$

d'où $\boxed{\vec{\Pi}_i = +TA^2\frac{\omega^2}{c_1}\sin^2\left(\omega t - \frac{\omega x}{c_1}\right)\vec{e}_x}$

(avec $y_i = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c_1}\right)$)

$\boxed{\vec{\Pi}_r = -r^2A^2T\frac{\omega^2}{c_1}\sin^2\left(\omega t + \frac{\omega x}{c_1}\right)\vec{e}_x}$

$\boxed{\vec{\Pi}_t = +t^2A^2T\frac{\omega^2}{c_2}\sin^2\left(\omega t - \frac{\omega x}{c_2}\right)\vec{e}_x}$

La conservation du transport d'énergie doit vérifier $\Pi_i = |\Pi_r| + \Pi_t$ en $x=0$

Vérifions le : $\Pi_r + \Pi_t = TA^2\omega^2\sin^2\omega t\left(\frac{r^2}{c_1}+\frac{t^2}{c_2}\right)$

$$\frac{r^2}{c_1}+\frac{t^2}{c_2} = \frac{\left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}-1\right)^2}{\sqrt{\frac{T}{\mu_1}}\left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}+1\right)^2} + \frac{4\frac{\mu_1}{\mu_2}}{\sqrt{\frac{T}{\mu_2}}\left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}+1\right)^2}$$

$$\frac{r^2}{c_1}+\frac{t^2}{c_2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{T}{\mu_1}}\left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}+1\right)^2}\left(\underbrace{\frac{\mu_1}{\mu_2} - 2\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} + 1 + 4\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}}_{\left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}+1\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{T}{\mu_1}}} = \frac{1}{c_1}$$

On a bien $\boxed{\Pi_i = |\Pi_r| + \Pi_t}$ qui traduit la conservation du transport de l'énergie lors du passage en O.

IV 1) $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ montré en II 6 b)

Fondamental, $n=1$ et $f = \frac{\omega}{2\pi}$ et $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

L'énoncé donne la fréquence du la_3 : 440 Hz

Les 3 cordes en acier doivent rendre

sol_2 : 1 octave et 1 ton sous la_3

si_2 : 1 octave et 1 ton au-dessus de la_3

mi_3 : 2 tons et $\frac{1}{2}$ au-dessous de la_3

"L'octave est divisé en une progression géométrique de 12 $\frac{1}{2}$ tons"

Fondamental $\quad 1\frac{1}{2}$ ton $\quad 2^e\frac{1}{2}$ ton $\quad \dots \quad 12^e\frac{1}{2}$ ton

$f \quad \alpha f \quad \alpha^2 f \quad \dots \quad \alpha^{12} f$

$\xrightarrow{\text{octave}} 2f$

donc $\alpha^{12} = 2$ soit $\boxed{\alpha = 2^{\frac{1}{12}}}$

Le la_2 est de fréquence moitié du la_3 soit 220 Hz

1 ton en dessous de la_2 donne un facteur $\alpha^{-2} = 2^{-\frac{1}{6}}$

donc sol_2 a comme fréquence $2^{-\frac{1}{6}}\cdot 220 \simeq 196$ Hz

Même raisonnement pour si_2 : $2^{\frac{1}{6}}\cdot 220 = 247$ Hz

Pour mi_3 : $2^{-\frac{5}{12}}\cdot 440 = 330$ Hz

$\omega_1 = \frac{\pi c}{L} = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = \mu\frac{\omega_1^2 L^2}{\pi^2}$

$\omega = 2\pi f \Rightarrow \boxed{T = 4\mu L^2 f^2}$ avec $\mu = d\rho_{eau}\pi\left(\frac{\phi}{2}\right)^2$

sol_2 $\quad f=196$ Hz $\quad T = 4\times 7870\times\pi\times\left(\frac{0{,}7\times10^{-3}}{2}\right)^2\times 0{,}645^2\times 196^2$

$T = 192$ N

si_2 $\quad f = 247$ Hz $\quad T = 192\left(\frac{247}{196}\right)^2\cdot\left(\frac{0{,}5}{0{,}7}\right)^2 = 155$ N

mi_3 $\quad f = 330$ Hz $\quad T = 192\left(\frac{330}{196}\right)^2\cdot\left(\frac{0{,}3}{0{,}7}\right)^2 = 100$ N

IV 2 a) les barrettes modifient L donc f_1

Or f_1 varie en $\frac{1}{L}$

Pour passer d'une note à 1 ton au-dessus, il faut faire varier f_1 d'un facteur $2^{\frac{1}{6}}$ donc en conséquence diminuer L d'un facteur $2^{\frac{1}{6}}$ et ce, quelle que soit la note au départ, donc quelle que soit la corde utilisée. Le raccourcissement doit être identique pour chaque corde si l'on souhaite monter d'1 ton. C'est pourquoi les barrettes sont perpendiculaires aux cordes.

IV 2 b) Du mi_3 au la_3 on a 2 tons et $\frac{1}{2}$ soit $5\ \frac{1}{2}$ tons.

Sur la corde du mi_3, la barrette est la 5ème pour obtenir le la_3.

$$\frac{L'}{L} = \frac{f}{f'} = \frac{f}{f \cdot 2^{5/12}} \quad \text{soit} \quad \boxed{L' = \frac{L}{2^{5/12}}}$$

$$L' = \frac{64,25}{2^{5/12}} = 48\ cm$$

IV 3 a) harmonique = monochromatique = 1 seule fréquence

Ce n'est pas le cas d'un instrument (il ne s'agit pas d'un synthétiseur)

IV 3 b) La fréquence la plus basse est le fondamental. On la lit entre 50 et 100 Hz. Comme le mi_1 est 2 octaves en-dessous du mi_3, sa fréquence est $\frac{330}{4}$ càd 82 Hz. Ça correspond à peu près.

Sur le document on lit 8 harmoniques double, triple, quadruple, etc du fondamental. La 4ème harmonique a une grande amplitude. Elle doit bien s'entendre.

La lecture du fondamental est peu précise. On peut éventuellement penser qu'elle est un peu sous 82 Hz, ce qui donnerait une corde non accordée.

IV 3 c) Le relevé 3 montre une fréquence fondamentale à f_0 telle sa période T_0 égale $\frac{1,6 \cdot 10^{-2}}{10}$ (10 oscillations sur $1,6 \cdot 10^{-2}$ s)

donc $f_0 = \frac{10^3}{1,6} = 625\ Hz$ ce qu'on lit effectivement sur le spectre relevé 4

Le mi_3 est à 330 Hz

$$625 = 2^{\frac{n}{12}} \times 330 \Rightarrow n = 12\ \frac{\ln \frac{625}{330}}{\ln 2} = 11$$

on a 11 $\frac{1}{2}$ tons (presque 1 octave)

$$L' = \frac{L}{2^{\frac{11}{12}}} = \frac{64,25}{2^{\frac{11}{12}}} = 30\ cm$$

On est au-dessus de la barrette du ré#3

On observe 2 petites fréquences dans le spectre relevé 4 vers 110 Hz et 60 Hz qui donnent l'ondulation de l'amplitude que on peut voir sur le relevé 3.

IV 4 a) Force $\sim \alpha\, ds\, \dot{z}$ càd $MLt^{-2} \sim \alpha L L t^{-1}$

donc $\boxed{\alpha \sim ML^{-1}t^{-1}}$ en $kg\,m^{-1}s^{-1}$

IV 4 b) Il suffit d'ajouter à l'équation d'onde le terme de frottement : (cf II 3 b)

$$T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx - \alpha\, ds \frac{\partial z}{\partial t} = \mu\, dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad \text{avec } ds \simeq dx$$

$$\text{soit} \quad \boxed{T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial z}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}}$$

IV 5 a) Non dissipatif = sans perte d'énergie

Tout phénomène est dissipatif (frottement inévitable). Le second principe décrit l'irréversibilité due aux phénomènes dissipatifs.

IV 5 b) On injecte la solution proposée ; en complexe on prendra la partie réelle après.

$$-T\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 A e^{\beta t + i2\pi f t} \sin\frac{\pi x}{L} - \alpha(\beta + i2\pi f) A e^{\beta t + i2\pi f t} \sin\frac{\pi x}{L}$$
$$= \mu\,(\beta + i2\pi f)^2 A e^{\beta t + i2\pi f t} \sin\frac{\pi x}{L}$$

$A e^{\beta t} \sin\frac{\pi x}{L}$ s'élimine ; il reste pour la partie réelle :

$$-T\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cos 2\pi f t - \alpha\beta \cos 2\pi f t + \alpha 2\pi f \sin 2\pi f t =$$
$$\mu\,(\beta^2 - 4\pi^2 f^2) \cos 2\pi f t - 2\mu\beta 2\pi f \sin 2\pi f t$$

Ceci doit être réalisé $\forall t$; on identifie donc les termes en $\cos 2\pi f t$ et ceux en $\sin 2\pi f t$:

$$\begin{cases} -T\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - \alpha\beta = \mu\,(\beta^2 - 4\pi^2 f^2) & (1) \\ \alpha 2\pi f = -2\mu\beta\, 2\pi f & (2) \end{cases}$$

On constate que $\beta < 0$ (car α et f sont > 0) ce à quoi on pouvait s'attendre car z ne peut croître indéfiniment.

Tirons α de (1) et insérons le dans (2)

$$\alpha = \frac{1}{\beta}\left[T\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - \mu(\beta^2 - \omega^2)\right]$$

d'où $\frac{1}{\beta}\left[-T\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - \mu(\beta^2-\omega^2)\right]\omega = -2\mu\beta\omega$ soit $\beta^2\left(\mu\omega\right) = \left(+T\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - \mu\omega^2\right)\omega$. (

ainsi $\beta^2 = \frac{T}{\mu}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - \omega^2$ Comme $\beta < 0$ on obtient : $\boxed{\beta = -\sqrt{\frac{T}{\mu}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - \omega^2}}$

Cette solution convient $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{T}{\mu}}\left(\frac{\pi}{L}\right) > \omega$ c.à.d $\omega < \frac{\pi c}{L}$ qui est le fondame

IV 6) On a la relation $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$ avec $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ et $\omega = 2\pi f$

donc $T = 4\mu (Lf)^2$

mi$_2$: on a f_1 T_1 ΔL_1 d'où $T_1 = 4\mu L^2 f_1^2$ et $E = \frac{T_1 L}{S \Delta L_1}$ (1)

mi$_3$: on a $f_2 = 2f_1$ T_2 ΔL_2 d'où $T_2 = 4\mu L^2 f_1^2 \times 4$ et $E = \frac{T_2 L}{S \Delta L_2}$ (2)

On connaît $\Delta L_2 - \Delta L_1 = \frac{1}{4} \times 2\pi \times \frac{5}{2} \times 10^{-3}$ m ($\frac{1}{4}$ de tour de clé)

Exprimons ΔL_1 de (1) : $\Delta L_1 = \frac{T_1 L}{SE}$

ΔL_2 de (2) : $\Delta L_2 = \frac{T_2 L}{SE}$

$\Rightarrow \Delta L_2 - \Delta L_1 = \frac{L}{SE}(T_2 - T_1)$

$= \frac{L}{SE} \times 4\mu L^2 f_1^2 (4-1)$

donc $\boxed{E = \frac{L}{S} \times 4\mu L^2 f_1^2 \times \frac{3}{\Delta L_2 - \Delta L_1}}$ avec $\mu = \rho_{eau}\, d_{densité} \times S$

AN $E = (62 \times 10^{-2})^3 \times 4 \times 7870 \times \left(\frac{330}{2}\right)^2 \times \frac{3}{\frac{1}{4}\, 2\pi \times \frac{5}{2} \times 10^{-3}} = 1{,}6 . 10^{11}$ Pa

C'est l'ordre de grandeur de module d'Young rencontré.

Résumé : • Une corde en équilibre sous l'action de son poids prend la forme d'une chaînette en $y = A \,\mathrm{ch}\, \frac{x}{A}$ On ne peut pas approximer ds et dx

Le calcul doit passer par $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ et par $\int \frac{df}{\sqrt{1+f^2}}$ où $f = \frac{dy}{dx}$

• Une corde attachée à ses 2 extrémités obéit à l'équation de D'Alembert avec une célérité $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ T : tension considérée comme uniforme, μ : masse linéique

Il se forme une onde stationnaire avec les modes $\omega_n = n\frac{\pi c}{L}$ L : longueur corde, n entier

ou $f_n = \frac{nc}{2L}$

L'énergie est somme d'énergie cinétique linéique $\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$ et d'énergie potentielle $\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$

La conservation d'énergie $\frac{\partial(e_c + e_p)}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{\pi}$ où $\vec{\pi} = -T\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\vec{e}_x$ vecteur de Poynting

dont la moyenne temporelle est nulle en tout point de la corde

• 2 cordes de masse linéique différente à la suite conduisent à une onde réfléchie et une onde transmise telles qu'on observe la continuité de y et celle de $\frac{\partial y}{\partial x}$ si le point de raccordage a une masse nulle

Il y a conservation du transport de l'énergie : $\Pi_i = |\Pi_r| + \Pi_t$

- La gamme est formée de 12 $\frac{1}{2}$ tons. Pour passer d'1 note à $\frac{1}{2}$ ton au-dessus on multiplie par $2^{\frac{1}{12}}$ la fréquence : $f_{Fa} = f_{Mi} \times 2^{\frac{1}{12}}$. T est proportionnelle

les tensions T sont [illegible] à $\mu L^2 f^2$