I.B. — Conductivité

On considère un milieu conducteur où les porteurs de charge possèdent chacun une charge q et une masse m. Ils sont présents dans le milieu conducteur supposé homogène et isotrope à raison d'une densité volumique n en m^{-3}. Ces porteurs sont soumis à un champ électrique qui va les mettre en mouvement pour créer un courant. Lorsqu'elles se déplacent, ces charges interagissent avec d'autres porteurs en mouvement mais aussi avec leur environnement fixe constitué par le réseau cristallin du conducteur. Elles subissent alors des interactions que l'on peut assimiler à des chocs. Il résulte de l'ensemble des interactions une force de type $-\dfrac{m}{\tau}\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse des porteurs mobiles et τ la durée moyenne qui sépare deux chocs successifs subis par une charge q. Cette durée est de l'ordre de 10^{-12} s. Le poids des charges sera négligé.

On étudie un conducteur cylindrique de section S, de rayon a et de longueur ℓ constitué du milieu conducteur défini ci-dessus. Ce conducteur est soumis à une différence de potentiel U_0 indépendante du temps qui impose un champ électrique $\vec{E}_0$ uniforme et indépendant du temps.

❏ **11** — Établir l'équation différentielle à laquelle satisfait la vitesse des porteurs de charge. Donner la solution $\vec{v}(t)$ sans se préoccuper de déterminer la constante d'intégration. Quelle est l'expression de la vitesse en régime permanent ? Sauf précision contraire, on considère que l'on est en régime permanent. Cette hypothèse est-elle contraignante ?

❏ **12** — La mobilité μ des porteurs de charge est définie de telle sorte que $\vec{v} = \mu\vec{E}_0$. Donner l'expression de la mobilité d'une charge q. Après avoir rappelé la définition de la densité volumique de courant $\vec{j}_0$, établir l'expression de la conductivité électrique γ_0 du conducteur définie par la loi $\vec{j}_0 = \gamma_0\,\vec{E}_0$. Quel est le nom de la loi précédente ?

❏ **13** — Déterminer l'expression de la résistance électrique R_0 du cylindre conducteur en fonction de γ_0, ℓ et S.

❏ **15** — On impose maintenant au dipôle non plus le champ électrique $\vec{E}_0$ mais un champ électrique $\vec{E}_1$ toujours uniforme mais dépendant du temps selon $\vec{E}_1 = \vec{E}_{1m}\cos\omega t$. Montrer que le dipôle peut être décrit au moyen d'une impédance complexe $\underline{Z}$ correspondant à l'association de deux dipôles et que la tension ne suit plus instantanément les évolutions de l'intensité. On exprimera $\underline{Z}$ en fonction, entre autres, de R_0. À quelle condition retrouve-t-on la situation où le dipôle est un résistor de résistance R_0 ? Qualifier le comportement du conducteur et l'interpréter.

On revient à la situation où le champ électrique $\vec{E}_0$ imposé est indépendant du temps. On étudie à nouveau la situation du régime permanent.

❏ **16** — Quelle est la puissance transférée à la charge q par le champ électrique $\vec{E}_0$? Quelle est la puissance volumique associée à ce transfert d'énergie ?

❏ **17** — En considérant l'ensemble du conducteur cylindrique, montrer que la puissance qu'il reçoit est $p = u\,i$. Cette expression peut être généralisée aux régimes lentement variables puisque la puissance instantanée $p(t)$ est alors donnée par : $p(t) = u(t)\,i(t)$.

Mines-Ponts PC1 17 (retirer 14 et 18)

11) PFD à q : $\boxed{m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}_0 - \dfrac{m\vec{v}}{\tau}}$

$$\dot{\vec{v}} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m}\vec{E}_0$$

$$\boxed{\vec{v} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{q\tau}{m}\vec{E}_0}$$

En régime permanent : $\boxed{\vec{v} = \dfrac{q\tau}{m}\vec{E}_0}$

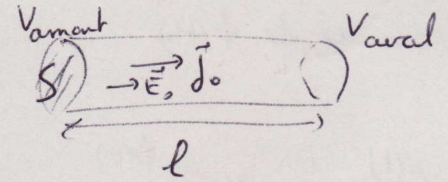
Il faut que $\tau \ll T$ période de $\vec{E}(t)$ ou $\dfrac{1}{\tau} \gg f$

12) $\vec{v} = \mu\vec{E}_0 \Rightarrow \boxed{\mu = \dfrac{q\tau}{m}}$

$\vec{j}_0 = nq\vec{v} = \gamma_0\vec{E}_0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{nq^2\tau}{m} = \gamma_0}$

Loi d'ohm locale

13)



$V_{amont} - V_{aval} = R_0 i = R_0 j_0 S = R_0\gamma_0 E_0 S$

$+ E_0 l = R_0\gamma_0 E_0 S$

$$\boxed{R_0 = \frac{l}{\gamma_0 S}}$$

15) On veut arriver à $V_{amont} - V_{aval} = Zi$ en complexe :

$$jm\omega\vec{v} = q\vec{E}_1 - \frac{m\vec{v}}{\tau}$$

$$\rightarrow \vec{v}\left(jm\omega + \frac{m}{\tau}\right) = q\vec{E}_1$$

$\vec{j} = nq\vec{v}$

$$\rightarrow \frac{\vec{j}}{nq}\left(jm\omega + \frac{m}{\tau}\right) = q\vec{E}_1$$

$\vec{j} = \gamma\vec{E}_1$

$$\rightarrow \frac{\gamma}{nq}\left(jm\omega + \frac{m}{\tau}\right) = q$$

$$\gamma = \frac{nq^2}{\frac{m}{\tau} + jm\omega} = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau}$$

d'où $Z = \dfrac{l}{\gamma S} = \dfrac{l}{\gamma_0 S}\dfrac{\gamma_0}{\gamma} = R_0(1 + j\omega\tau)$

$$\boxed{Z = R_0(1 + j\omega\tau)}$$

$Z \simeq R_0$ si $\omega\tau \ll 1$ càd à des fréquences très inférieures à $\dfrac{1}{\tau}$ (ici 10^{12} Hz)

$\boxed{\text{A } f < 10^{10} \text{ Hz, le conducteur peut être assimilé à une résistance.}}$

16) La puissance communiquée à q est $\mathcal{P} = f \cdot v = qE_0 v = \dfrac{q^2\tau}{m}E_0^2$

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{q^2\tau}{m}E_0^2}$$

Puissance volumique : $\mathcal{P}_{vol} = n\mathcal{P} = \dfrac{nq^2\tau}{m}E_0^2$

$$\boxed{\mathcal{P}_{vol} = \gamma_0 E_0^2}$$

17) Pour tout le cylindre :

$\mathcal{P}_{cylindre} = \mathcal{P}_{vol} \times Sl = \gamma_0 E_0^2 Sl$

Or $u = E_0 l$ et $i = jS = \gamma_0 E_0 S$

donc $\boxed{\mathcal{P}_{cylindre} = ui}$ (OK)