

PREMIÈRE PARTIE : ATOME HYDROGÉNOÏDE

Le modèle d'atome d'hydrogène proposé par Niels BOHR s'appuie principalement sur les axiomes suivants : dans un référentiel galiléen,

- i) l'électron décrit une trajectoire circulaire de rayon r sur laquelle il ne rayonne pas,
- ii) l'électron échange de l'énergie avec l'extérieur lorsqu'il change de trajectoire circulaire,
- iii) *axiome de quantification* : $mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$, où m et v désignent respectivement la masse et le

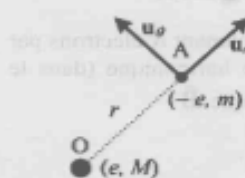


Fig. 1 : Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène.

module de la vitesse de l'électron, n un nombre entier naturel non nul et h la constante de Planck. À chaque valeur de l'entier n correspond une valeur du rayon r , de la vitesse v et de l'énergie, notées respectivement r_n , v_n et E_n .

On considère (Fig. 1) un atome d'hydrogène constitué d'un proton (charge e , masse M) et d'un électron (charge $-e$, masse m). Le proton, situé en un point O , est supposé immobile ; l'électron, en A , est repéré par le vecteur $\overrightarrow{OA} = r\hat{u}_r$, dans le repère polaire $(\hat{u}_r, \hat{u}_\theta)$ utilisé dans cette partie.

- 1 – Justifier l'unité de la constante h (J.s) qui figure dans le tableau de la page 7.
- 2 – Montrer que l'on peut négliger la force gravitationnelle devant la force électrostatique entre le proton et l'électron (la constante de la gravitation G peut s'estimer à partir de données, même approximativement connues).
- 3 – Établir que pour le mouvement circulaire de l'électron, $E_p + 2E_c = 0$, où E_c est l'énergie cinétique et E_p l'énergie potentielle (Théorème du viriel). Exprimer E_c de l'électron en fonction du rayon r de la trajectoire circulaire. Exprimer le rayon r_n en fonction de n et de r_1 , correspondant à $n = 1$. En utilisant l'axiome de quantification, exprimer r_1 en fonction de ϵ_0, m, e et h . Calculer r_1 .
- 4 – Calculer l'ordre de grandeur du champ électrique créé par le proton à la distance $r = r_1$. Comparer la valeur de ce champ électrique atomique à un champ électrique macroscopique, produit dans des conditions expérimentales que vous préciserez.
- 5 – En déduire l'énergie mécanique totale E de l'électron en fonction de n et des données ϵ_0, m, e et h . L'origine des énergies pour l'électron correspond à l'état où l'électron est au repos à une distance infinie du proton. Écrire E sous la forme $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ en précisant l'expression de E_1 . Interpréter le signe de E_n . On appelle « état fondamental » de l'atome l'état d'énergie minimale. Montrer que cet état correspond à E_1 . Calculer E_1 en électron-volt.
- 6 – Exprimer la vitesse v_n en fonction de n et de v_1 . Exprimer v_1 . Calculer v_1 . Comparer sa valeur à celle de c , vitesse de la lumière dans le vide. Conclure.

Texte introductif aux questions 7 à 10

Dans les questions suivantes, l'électron a une énergie totale minimale, ce qui correspond à l'état fondamental de l'atome. On assimile le mouvement de l'électron à une boucle de courant.

- 7 – L'électron en mouvement sur sa trajectoire circulaire peut être assimilé à un courant électrique. Exprimer I l'intensité équivalente de la boucle de courant. Calculer I .

8) On donne la valeur du champ magnétique créé en O (le calcul étant HP maintenant) : 12 T

- 9 – Donner l'ordre de grandeur des champs magnétiques les plus intenses actuellement réalisables. Comparer cet ordre de grandeur à la valeur numérique obtenue à la question 8.

□ 10 – Si le modèle de Bohr a permis d'expliquer certaines caractéristiques des spectres de l'atome d'hydrogène, ce modèle, qui s'appuie sur la mécanique de Newton, n'a pu expliquer l'ensemble des propriétés des atomes. Ces dernières s'interprètent dans le cadre de la mécanique quantique. Rappeler en quelques mots les conditions de validité de la mécanique classique.

Masse de l'électron	$m = 0,911 \times 10^{-30} \text{ kg}$
Charge du proton	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
Rapport des masses proton/électron	$\frac{M}{m} = 1836$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H.m}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Champ électrique d'ionisation de l'air	$E_{\text{disruptif}} \approx 10^6 \text{ V.m}^{-1}$

1) $mvr = n \frac{h}{2\pi} \Rightarrow h \sim mvr \sim mL^2 t^{-1}$

Energie $\sim F \cdot L \sim mL^2 t^{-2}$ donc $[h \sim \text{Energie} \times t]$
h se mesure donc en J.s

2) $\left| \frac{f_{\text{grav}}}{f_{\text{el}}} \right| = \frac{G m_p m_e}{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} = \frac{G M m}{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}}$

"G peut s'estimer à partir de données approxi-
mativement connues" par ex le champ g
de pesanteur terrestre : $g = \frac{G M_T}{R_T^2}$ connaissant
 $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ et $R_T = 6400 \text{ km}$ $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$
 $\Rightarrow G = 7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$

$\left| \frac{f_{\text{grav}}}{f_{\text{el}}} \right| = \frac{7 \cdot 10^{-11} \cdot 1836 \cdot 0,911 \cdot 10^{-30}}{(6400 \cdot 10^3)^2} \sim 5 \cdot 10^{-40}$

$f_{\text{grav}} \ll f_{\text{el}}$

3) $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ $E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$

Tout à l'é : $m \frac{v^2}{a} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \Rightarrow m v^2 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$

soit $E_c = -\frac{1}{2} E_p$ d'où $2E_c + E_p = 0$

$E_c = +\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \Rightarrow v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m a}$

$m v^2 = n \frac{h}{2\pi a} \Rightarrow a_n = \frac{n h \sqrt{4\pi\epsilon_0 m a}}{2\pi m e}$

$\sqrt{a_n} = \frac{n h}{e} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{m}} \Rightarrow a_n = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{e^4 \pi m}$

$a_1 = \frac{h^2 \epsilon_0}{e^4 \pi m}$

$a_n = n^2 a_1$

AN : $a_1 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}} = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

$a_1 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

4) $E_{\text{poton}}(n) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_n} = \frac{1,602 \cdot 10^{-19}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,53 \cdot 10^{-10}}$

$E_{\text{poton}}(n) = 5,14 \cdot 10^4 \text{ V.m}^{-1}$

Une machine de Wimshurst peut produire
par frottement électrostatique jusqu'à 10 kV.
Si on rapproche les boules métalliques d'une

distance de 1 cm, cela conduit à un
champ E de l'ordre de 10^6 V.m^{-1} ce qui
correspond au champ $E_{\text{disruptif}}$ ①

La valeur du champ $E_{\text{poton}}(n)$ est donc beaucoup
plus élevée que la valeur des champs électriques
macroscopiques

5) $E = E_c + E_p = -\frac{1}{2} E_p + E_p = \frac{1}{2} E_p = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$

$E_n = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a_n} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{e^4 \pi m}}$

$E_n = -\frac{e^4 m}{8 \epsilon_0^2 h^2 n^2} = \frac{E_1}{n^2}$ avec $E_1 = -\frac{e^4 m}{8 \epsilon_0^2 h^2}$

L'origine des énergies est prise pour un électron
situé à distance infinie du proton, c'd à $n \rightarrow \infty$
Elle correspond à l'ion H^+ . Les états
de l'atome H où l'électron se rapproche du
proton sont plus stables au fur et à mesure
de ce rapprochement. Les énergies sont donc
plus basses que celle de H^+ , donc négatives.

Comme $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ avec $E_1 < 0$, l'état de
plus basse énergie correspond à $n = 1$

$E_1 = -\frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}}{8 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}} \text{ (en eV)}$

$E_1 = -13,6 \text{ eV}$

6) f) $v_n^2 = -\frac{E_n}{m} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m a_n}$ donc $v_n^2 = \frac{a_1}{a_n} v_1^2$
 $v_1^2 = -\frac{E_1}{m} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m a_1}$ $\downarrow$
 $v_n = \frac{v_1}{n}$

AN : $v_1 = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m a_1}} = \frac{1,602 \cdot 10^{-19}}{\sqrt{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 0,53 \cdot 10^{-10}}}$

$v_1 = 2,2 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$ $\frac{v_1}{c} = \frac{2,2 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} < 10^{-2}$

on peut donc considérer l'électron comme non relativiste

7) $I = \frac{-e v_1}{T}$ où T est la période de rotation

$T = \frac{2\pi a_1}{v_1} \rightarrow I = \frac{-e v_1}{2\pi a_1}$

AN : $I = \frac{-1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 2,2 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 0,53 \cdot 10^{-10}} = -1,0 \cdot 10^{-3} \text{ A}$

Le signe - signifie que le sens de I est opposé à
celui de l'électron.

8) Deux façons de calculer B(0)

* assimiler à une spire de rayon a_1
* utiliser $B_{\text{axe}} = \mu_0 i \sin^2 \theta$

3) On peut réaliser des champs magnétiques plus forts dans un espace réduit (par ex 100 T dans quelques cm^3) mais une dizaine de Tesla est déjà un très fort champ magnétique. Rappelons le champ magnétique terrestre $\sim 10^{-5} \text{ T}$

10) Conditions de validité de la méca. classique :

- domaine non relativiste $v \ll c$
- moment cinétique $mrv \gg \hbar$