

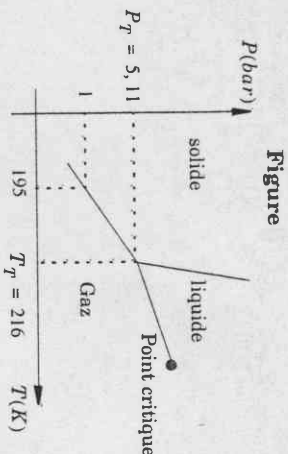
Transport du CO_2 industriel au fond des océans par torpilles de CO_2 solides

Un des moyens de se débarrasser du CO_2 industriel consiste à le stocker au fond des mers. Parmi les technologies possibles, l'idée suivante a été proposée :

- A l'aide d'installations frigorifiques situées sur des plates formes marines, on solidifie le CO_2 (issu d'un processus industriel) en le moulant sous forme de très grandes torpilles.

- Ces torpilles sont abandonnées depuis la surface de la mer et tombent au fond, où elles vont se fiche

Diagramme de phase du CO_2 .
Point triple : $T_p = 5,11 \text{ bar}$; $T_p = 216 \text{ K}$;
Température de sublimation à 1 bar : $T_s = 195 \text{ K}$



Un des problèmes posés par ce schéma est la perte de masse des torpilles par changement de phase au cours de leur chute. Le CO_2 ainsi libéré est susceptible de retourner à l'atmosphère, et doit donc être minimisé. Nous nous proposons d'évaluer cette perte de masse afin de juger de la viabilité du processus. Nous admettons que l'océan est un fluide au repos, incompressible homogène et uniforme ($T_0 = 280 \text{ K}$). L'accélération de la pesanteur, g , vaut $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$. Le CO_2 solide a une masse volumique $\rho = 1500 \text{ kg.m}^{-3}$, supposée indépendante de la température et de la pression. Son enthalpie massique de sublimation est $L_s = 570 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et celle de fusion est $L_f = 189 \text{ kJ.kg}^{-1}$ (considérées constantes). Le diagramme de phase simplifié du CO_2 est donné sur la figure. On appelle Oz la verticale descendante, orientée par le vecteur unitaire e_z . La cote $z = 0$ correspond à la surface de l'océan (où il règne une pression $P_0 = 1 \text{ bar}$) ; le fond est à la profondeur $z = H = 4000 \text{ m}$.

A - Changements de phase en surface des torpilles.

A.1) Déterminer la pression dans l'océan en fonction de la profondeur z .

A.2) En vous appuyant sur le diagramme de phase, montrer que le CO_2 en surface de la torpille est susceptible de se sublimer jusqu'à une profondeur Z_s et de subir une fusion au delà. Calculer numériquement Z_s .

A.3) Nous modélisons la torpille par un cylindre de rayon $r(t)$ dépendant du temps et de hauteur h constante. Pour les applications numériques on prendra $h = 30 \text{ m}$ et $r(t = 0) = 2,70 \text{ m}$.

La température à la surface de la torpille est supposée uniforme. Lorsque le centre d'inertie de la torpille se trouve à la profondeur z , cette température est égale à la température d'équilibre de changement de phase $T_{eq}(z)$ régnant à cette profondeur. De ce fait, la torpille reçoit de la part de l'océan une puissance thermique par unité de surface

Figure

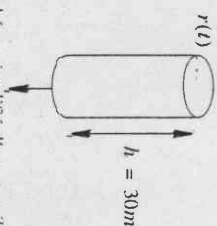


Schéma simplifié d'une torpille de CO_2 solide. En pratique une torpille réelle serait optimisée pour optimiser ses propriétés hydrodynamiques.

$P_{th} = K(T_0 - T_{eq}(z))$, où K est une constante ($K = 66 \times 10^3 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$). On considère que ce transfert thermique se produit seulement par la surface latérale du cylindre. On note $L(z)$ l'enthalpie massique de changement de phase (sublimation ou fusion) du CO_2 à la profondeur z .

a) Quelle énergie δQ la torpille doit-elle recevoir par transfert thermique pour que son rayon varie d'une quantité infinitésimale dr par changement de phase ?

b) En déduire le taux de variation dr/dt du rayon de la torpille en fonction de $K, T_0, L(z), T_{eq}(z), \rho$.

Pour un raisonnement en ordre de grandeur, on suppose que durant la phase de sublimation la température reste constante et vaut $T_1 = 205 \text{ K}$ et que durant la phase de fusion, elle vaut $T_2 = 223 \text{ K}$.

c) Déterminer dr/dt durant les deux phases.

B - Étude dynamique de la torpille

Du fait des changements de phase se produisant à sa surface, la masse $M(t)$ de la torpille varie au cours du temps ; on admet pour simplifier que la matière ainsi perdue a une vitesse nulle relativement au référentiel terrestre (supposé galiléen). On note $V(t)$ la vitesse verticale (descendante). En plus de son poids $M(t)\vec{g}$, la torpille est soumise à la force d'Archimède $\vec{F}_a$ et à une force de frottement de la forme : $\vec{F} = -\alpha_f V^2 \vec{e}_z$, où α_f est une constante, à peu près indépendante des dimensions de la torpille ($\alpha_f = 1,0 \times 10^4 \text{ kg.s}^{-1}.\text{m}^{-2}$).

B.1) En raisonnant sur la quantité de mouvement d'une même quantité de matière à l'instant t et à l'instant $t + dt$, établir l'équation du mouvement :

$$\frac{d(M\vec{V})}{dt} = M\vec{g} + \vec{F}_a + \vec{F}$$

On remarquera que la masse de la torpille varie au cours du temps.

B.2) En déduire que $r(t)$ et $V(t)$ sont liés par une équation différentielle du type

$$\frac{dr}{dt} + \left(\frac{2}{r} \frac{dr}{dt} + \frac{1}{t_0} \right) V = \beta g \quad (\beta \text{ suppose constant})$$

dans laquelle t_0 et β sont des constantes que l'on exprimera en fonction de $\rho, \rho_0, \alpha_f, h$.

B.3) La résolution du système d'équations obtenu nécessite l'emploi de méthodes numériques. Celles-ci montrent que, pour les dimensions envisagées, on a :

$$\frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \ll \frac{1}{t_0}, \text{ hypothèse que l'on supposera vérifiée dans toute la suite.}$$

a) Déterminer la vitesse de la torpille (abandonnée sans vitesse initiale) en fonction du temps. Montrer qu'elle finit par atteindre une valeur limite V_f . Pourquoi-on physiquement déterminer cette valeur limite ? Interpréter t_0 physiquement.

b) Calculer V_f et t_0 numériquement.

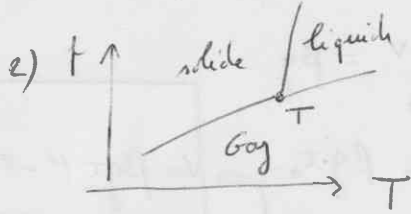
C - Évaluation de la perte de masse

C.1) Calculer numériquement le temps t_c mis par la torpille pour toucher le fond (situé à 4000m).

C.2) On montre que la phase de sublimation dure $t_s = 5,5 \text{ s}$. Calculer numériquement le rayon final de la torpille alors quelle arrive au fond de l'océan et sa perte relative de masse au cours de la chute. Que pensez-vous de ce moyen de se débarrasser du dioxyde de carbone ?

Centrale PP 03

A.1) Statique fluides



$$dp = \rho_0 g dz \text{ pour } z \text{ descendant} \Rightarrow \boxed{p = p_0 + \rho_0 g z}$$

ρ_0 : masse vol. de l'eau de mer

Sublimation (solide $\rightarrow$ gaz) possible pour $p < p_T$

Fusion (solide $\rightarrow$ liquide) possible pour $p > p_T$

$\Rightarrow$ la limite est pour $p = p_T$ c'ad $p_0 + \rho_0 g z_s = p_T$

sublimation pour $p_0 + \rho_0 g z_s < p_T$ soit pour $z_s < \frac{p_T - p_0}{\rho_0 g}$

fusion pour $p_0 + \rho_0 g z_s > p_T$ soit pour $z_s > \frac{p_T - p_0}{\rho_0 g}$

$$AN \quad \underline{z_s} = \frac{p_T - p_0}{\rho_0 g} = \frac{(5,11 - 1) \times 10^5}{1030 \times 9,8} = \underline{40,7 \text{ m}}$$

3) a) Chaleur reçue par la bouille pendant dt : $S_{lat} P_{th} dt$
Utilisée pour le changement de phase : $|dm| L \quad (dm < 0)$ $\Rightarrow \int S_{lat} P_{th} dt = -L dm$

$$m = \rho \pi r^2 h \quad \rightarrow \quad dm = \rho \pi r h \quad dr$$

ρ masse vol de CO_2

$$S_{lat} = 2\pi r h$$

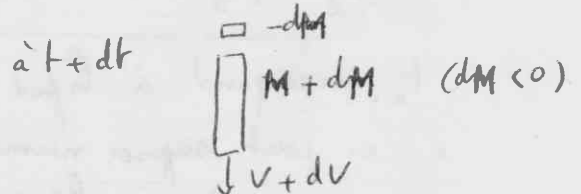
$$\Rightarrow 2\pi r h K (T_0 - T_{eq}) dt = -\rho \pi r h \quad dr \quad L \quad \Rightarrow \quad \boxed{dr = - \frac{K (T_0 - T_{eq}) dt}{\rho L}}$$

$$b) \Rightarrow \boxed{\frac{dr}{dt} = - \frac{K (T_0 - T_{eq}(z))}{\rho L(z)}}$$

c) 1^{ère} phase $0 < z < z_s$ sublimation : $\frac{dr}{dt} = - \frac{66 \times 10^{-2} (280 - 205)}{1500 \times 570 \times 10^3} = -0,58 \text{ mm.s}^{-1}$

2^{ème} phase $z_s < z$ fusion : $\frac{dr}{dt} = - \frac{66 \times 10^{-2} (280 - 223)}{1500 \times 189 \times 10^3} = -1,33 \text{ mm.s}^{-1}$

B.1) Syst bouille à t



Ref. terrestre (gal.)

T.C.I au syst : $(\pi + d\pi)(v + dv) - \pi v - d\pi \times 0 = \pi \vec{g} - \alpha \rho r^2 \vec{V} + \vec{F}_a$

soit $\boxed{\frac{d(\pi v)}{dt} = \pi \vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_a}$ par hyp.

2) $\frac{d(\pi v)}{dt} = \pi g - \alpha \rho r^2 v - \rho_0 \pi r^2 h g \quad \Rightarrow \quad v \rho \pi r h \frac{dr}{dt} + \rho \pi r^2 h \frac{dv}{dt} = (\rho \pi r^2 h - \rho_0 \pi r^2 h) g - \alpha \rho r^2 v$

$$\pi = \rho \pi r^2 h$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + \left(\frac{2}{r} \frac{dr}{dt} + \frac{\alpha \rho}{\rho_0 h} \right) v = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) g}$$

ou encore $\frac{dV}{dt} + \left(\frac{2}{r} \frac{dr}{dt} + \frac{1}{\tau_0} \right) V = \beta g$ avec $\tau_0 = \frac{\pi \rho h}{\alpha_f}$ et $\beta = 1 - \frac{\rho_0}{\rho}$ (2)

B.3) a) hyp. tante : $\frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \ll \frac{1}{\tau_0} \Rightarrow \frac{dV}{dt} + \frac{1}{\tau_0} V = \beta g$
 équa. lin. du 1^{er} ordre : $V = A e^{-\frac{t}{\tau_0}} + \beta g \tau_0 \Rightarrow V = \beta g \tau_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}})$
 Cond^{ns} init : $V = 0$ à $t = 0$

Quand $t \rightarrow \infty$ $V_{\text{lim}} = \beta g \tau_0$

Physiquement, V_{lim} correspond à $\Sigma F = 0$ (en oubliant que Π varie)

càd $Mg = \alpha_f r^2 V_{\text{lim}} + \beta \pi r^2 h g$

soit $\rho \pi r^2 h g = \alpha_f r^2 V_{\text{lim}} + \rho_0 \pi r^2 h g$

soit $V_{\text{lim}} = \frac{(\rho - \rho_0) \pi g}{\alpha_f} = \beta g \tau_0$

τ_0 : temps au bout duquel V atteint $\sim 60\%$ de sa val. limite

b) $V_{\text{lim}} = \left(1 - \frac{1030}{1500} \right) \times \frac{9,8 \times \pi \times 1500 \times 30}{1 \times 10^4} = 43,4 \text{ ms}^{-1}$

$\tau_0 = \frac{\pi \times 1500 \times 30}{1 \times 10^4} = 14,1 \text{ s}$

C.1) Intégrer V obtenu en B.3) a) : $y = \beta g \tau_0 \left(t + \tau_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right) + C^t$
 Cond^{ns} init : $y = 0$ à $t = 0 \Rightarrow C^t = -\beta g \tau_0^2$

$\Rightarrow y = \beta g \tau_0 \left(t + \tau_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right) - \beta g \tau_0^2$

t_c correspond à $h_{\text{fond}} = 4000 \text{ m}$

on peut supposer numériq^t que $\tau_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}} \ll t_c$

$\Rightarrow \frac{t_c}{\tau_0} = \frac{h_{\text{fond}} + \beta g \tau_0^2}{\beta g \tau_0} = \tau_0 + \frac{h_{\text{fond}}}{\beta g \tau_0} = 14,1 + \frac{4000}{43,4} = 106,9 \text{ s}$

on vérifie bien que $\tau_0 e^{-\frac{t_c}{\tau_0}} \ll t_c$ càd $14,1 \times e^{-\frac{106,9}{14,1}} \ll 106,9$

2) (on vérifie numériq^t que y est bien égal à $\beta g \tau_0 (t_s + \tau_0 e^{-\frac{t_s}{\tau_0}}) - \beta g \tau_0^2$)
 càd $40,7 = 43,4 (5,5 + 14,1 e^{-\frac{5,5}{14,1}}) - 43,4 \times 14,1$

cf A3) c) on a $\frac{dr}{dt}$ au cours des 2 phases ; on connaît la durée des 2 phases

$\Rightarrow r = r_0 + \left(\frac{dr}{dt} \right)_{\text{sublim (1^{re} phase)}} t_s + \left(\frac{dr}{dt} \right)_{\text{fusion (2^e phase)}} (t_c - t_s) = 2,70 + 0,58 \times 10^{-3} \times 5,5 - 1,33 \times 10^{-3} \times (106,9 - 5,5)$

Perte relative de masse $\frac{2,70 - 2,56}{2,70} = 10\%$ acceptable ds la pratique et utilisée