

IA1) Écoulement incompressible $\Rightarrow \text{div } \vec{u} = 0$
 avec $u(x, y) \vec{e}_x$ cela mène à $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
 donc u ne dépend pas de x (OK)

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\vec{u}}{Dt} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &\text{ est nul car "stationnaire"} \\ (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} &= u \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{0}}$$

$$\Delta \vec{u} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \vec{e}_x = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \vec{e}_x$$

$$\boxed{\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \vec{e}_x}$$

IA2) Projection de Navier-Stokes sur $\vec{e}_y$:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + 0 - \mu g \cos \theta$$

$$\rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = -\mu g \cos \theta$$

Intégrons: $\boxed{p = -\mu g \cos \theta (y - h) + p_0}$
 pour assurer la continuité de la pression en h quel que soit x .

IA3) Projection de Navier-Stokes sur $\vec{e}_z$:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu g \sin \theta$$

nul

Intégrons 2 fois: $u = -\frac{\mu g \sin \theta}{\eta} \frac{y^2}{2} + ct_1 y + ct_2$

ou encore: $\boxed{u = -\frac{g \sin \theta}{\nu} \frac{y^2}{2} + ct_1 y + ct_2}$

IA4) Le fluide est visqueux; il y a donc continuité de la vitesse en $y=0$ c-à-d $u(y=0) = 0$ puisque le plan incliné est fixe.

Soit un élément dS de l'interface eau-air de masse $\delta m = 0$; il est soumis à une force de viscosité due à l'air placé au-dessus

$$\vec{F}_{\text{air}/dS} = \eta_{\text{air}} dS \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{e}_x$$

à une force de viscosité due au fluide placé au-dessous

$$\vec{F}_{\text{fluide}/dS} = -\eta dS \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{e}_x$$

La somme des deux est nulle puisque l'élément dS n'a pas de masse.

Donc on considère $\eta_{\text{air}} = 0$ on en déduit

$$\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=h} = 0} \quad (\text{OK})$$

IA5) Avec les conditions limites précédentes $u(y=0) = 0$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=h} = 0$
 on en déduit: $\boxed{u = -\frac{g \sin \theta}{\nu} \left(\frac{y^2}{2} - hy \right)}$

IA6) $D_s = q = \int_{y=0}^h u b dy$

le calcul donne: $\boxed{q = \frac{1}{3} \frac{g \sin \theta}{\nu} h^3 b}$ (OK)

IB1) Si on remplace b par $2\pi R(z)$, le débit q est erroné au bout de la stalactite où le rayon R est nul alors que le débit n'est pas nul.

IB2) Si le débit ne varie pas avec le temps il suffit de mesurer le volume d'eau qui tombe en bas de la stalactite par unité de temps. Cela donne la valeur de q .

IB3) $q_0 = \frac{1}{3} \frac{g \sin \theta}{\nu} h^3 b$ et $b = 2\pi R$

d'où $h = \left(\frac{3 q_0 \nu}{2\pi g R \sin \theta} \right)^{\frac{1}{3}} = l_c^{\frac{4}{3}} (R \sin \theta)^{-\frac{1}{3}}$

où $\boxed{l_c = \left(\frac{3 q_0 \nu}{2\pi g} \right)^{\frac{3}{4}}}$ est homogène à une longueur pour assurer l'homogénéité

IB4) $\underline{l_c} = \left(\frac{3 \times 50 \times 10^{-3} \times 10^{-3} \times 10^{-6}}{3600 \times 2\pi \times 9,8} \right)^{\frac{3}{4}} = 0,16 \text{ mm}$

$h_0 = l_c^{\frac{3}{4}} \left(R_0 \sin \frac{\pi}{2} \right)^{-\frac{1}{3}} = (0,16 \times 10^{-3})^{\frac{3}{4}} \times (5 \times 10^{-2})^{-\frac{1}{3}} = 0,024 \text{ mm}$
 $h_0 = 24 \mu\text{m}$

$q_0 = u_m \times h_0 \times 2\pi R_0 \rightarrow \boxed{u_m = \frac{q_0}{h_0 2\pi R_0}}$

$\underline{u_m} = \frac{50 \times 10^{-3} \times 10^{-3}}{3600 \times 24 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 0,05} = 1,8 \text{ mm.s}^{-1}$

IB5) $\underline{Re} = \frac{u_m h_0}{\nu} = \frac{1,8 \times 10^{-3} \times 24 \times 10^{-6}}{10^{-6}} \approx 0,043$

On trouve un nombre de Reynolds très inférieur à 1 ce qui prouve que l'écoulement est laminaire.

IB6) Si le modèle n'est valable que pour $\frac{h}{R} < 10^{-1}$ alors $R > \frac{h}{10^{-1}}$

En prenant h_0 il faut que $R > 2,4 \mu\text{m}$

II A1) Un temps de diffusion est issu de l'équation de diffusion $\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$
d'où $\tau_d = \frac{h^2}{D}$ temps de diffusion dans l'épaisseur h du film.

$$AN \quad \tau_d = \frac{(10 \cdot 10^{-4})^2}{10^{-5} \cdot 10^{-4}} = 10^{-1} s = 0,1 s$$

Si on adopte u_m comme vitesse de l'écalement on aura alors $\tau_L = \frac{L_0}{u_m} = \frac{100 \cdot 10^{-2}}{1 \cdot 10^{-3}} = 10^3 s$ au plus long

$$ou \text{ bien } \tau_L = \frac{10 \cdot 10^{-2}}{10 \cdot 10^{-3}} = 10 s \text{ au plus court}$$

On s'aperçoit que τ_d est toujours bien inférieur à τ_L . On peut donc négliger le mouvement de l'eau pendant la diffusion d'une espèce dans l'épaisseur du film.

II A2) Le tableau donne le taux d'allongement

$$\frac{\delta L}{\delta t} = 1 \text{ cm par siècle} \quad \text{Le temps } \tau_h$$

pour une poussée de h est $\tau_h = \frac{h}{1 \text{ cm/siècle}}$

$$\text{soit } \tau_h = 10 \cdot 10^{-4} \text{ siècle} = 10^{-3} \text{ siècles}$$

$$\tau_h = 0,1 \text{ an} \quad \tau_h \approx 36 \text{ jours}$$

On a toujours $\tau_h \gg \tau_d$. Le régime de diffusion peut donc être supposé stationnaire la croissance de la stalactite n'intervenant pas.

II A3) Si l'allongement $\frac{\delta L}{\delta t}$ correspond à l'ajout d'un disque à sa base c'est en $z=0$ où le rayon est R_0 , alors le volume rajouté est $\delta L \cdot \pi R_0^2$ par siècle.

$$d'où \quad m_{\text{CaCO}_3 \text{ déposée}} = \rho_{\text{CaCO}_3} \delta L \pi R_0^2 \text{ par siècle}$$

$$m_{\text{CaCO}_3 \text{ déposée}} = 2,7 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2} \pi \cdot 5^2 \cdot 10^{-4}$$

$$m_{\text{CaCO}_3 \text{ déposée}} \in [0,210 ; 0,850] \text{ kg par siècle}$$

$$m_{\text{Ca}} \text{ déposé est } 0,4 \text{ fois } m_{\text{CaCO}_3 \text{ déposée}}$$

$$m_{\text{Ca}} \text{ déposée} \in [80 \text{ g} ; 340 \text{ g}] \text{ par siècle}$$

l'énoncé indique 150 mg L^{-1} d'ions Ca^{2+} dans l'eau qui ruisselle. Avec un débit $Q = 50 \text{ mL} \cdot \text{s}^{-1}$ on a donc eu un volume $V = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 24 \cdot 365 \cdot 100$ déversé pendant 1 siècle en l'eau qui contenait donc $150 \cdot 10^{-3} V \text{ g}$ d'ions Ca^{2+}

$$m_{\text{Ca}^{2+} \text{ ruisselant}} = 6570 \text{ g}$$

C'est une masse plus grande que celle de calcium déposée sur la stalactite. La proportion d'ions calcium ayant précipité est de : $\frac{80}{6570}$ à $\frac{340}{6570}$ soit 1% à 5%.

Il y a ainsi énormément d'ions Ca^{2+} dans l'eau qui tombe sous la stalactite et qui peuvent donc précipiter sur le sol d'où la montée d'une stalagmite.

II A4) Bilan de matière pendant dt :

$$S N_{\text{entrant en } z} - S N_{\text{sortant en } z+dz} + \frac{S^2}{\tau_c} N_c = 0$$

produit en région stationnaire

$$j(z) S dt - j(z+dz) S dt + \frac{n_0 - n}{\tau_c} S dz dt = 0$$

$$- \frac{\partial j}{\partial z} dz S dt + \frac{n_0 - n}{\tau_c} S dz dt = 0$$

$$\text{Loi de Fick : } j = -D \frac{\partial n}{\partial z}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 n}{\partial z^2} - \frac{n}{D \tau_c} = -\frac{n_0}{D \tau_c}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{\partial^2 n}{\partial z^2} - \frac{n}{\delta^2} = -\frac{n_0}{\delta^2}} \quad (\text{OK})$$

avec $\delta^2 = D \tau_c$

$$\delta^2 = 10^{-5} \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 = 10^{-5} \quad \delta = 0,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$\delta \approx 3 \text{ mm}$

II A5) Intégration d'une équ. diff. linéaire:

$$n = n_h + n_p = A e^{\frac{z}{\delta}} + B e^{-\frac{z}{\delta}} + n_0$$

II A6) Le flux de particules est continu.

Or rien ne se passe en $z=0$ là où c'est solide, donc $j(z=0^-) = 0$ d'où $j(z=0^+) = 0$ c'est $\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$

$$\text{On a alors } \boxed{A = B} \quad \text{et} \quad \boxed{n = 2A \cosh \frac{z}{\delta} + n_0}$$

II A7) Avec la condition $n(z=h_-) = X n(z=h_+)$ et avec l'hypothèse de l'énoncé: $n(z=h_+) = n_\infty$ on a $n(z=h_-) = n_0$ d'où $2A \cosh \frac{h}{\delta} = X n_\infty - n_0$

$$A = \frac{X n_\infty - n_0}{2 \cosh \frac{h}{\delta}} \quad \text{et} \quad \boxed{n = \left(\frac{X n_\infty - n_0}{\cosh \frac{h}{\delta}} \right) \cosh \frac{z}{\delta} + n_0}$$

II A8) Le vecteur densité de flux de molécules est $\vec{j} = -D \frac{\partial n}{\partial z} \vec{e}_z$

$$\text{Or } \frac{\partial n}{\partial z} = \left(X n_\infty - n_0 \right) \frac{1}{\delta} \frac{\sinh \frac{z}{\delta}}{\cosh \frac{h}{\delta}}$$

$$\text{Soit } \vec{j}(z=h) = -D \left(X n_\infty - n_0 \right) \frac{1}{\delta} \tanh \frac{h}{\delta} \vec{e}_z$$

Pour $h \ll \delta$

$$\boxed{\vec{j}(z=h) \approx -D \left(X n_\infty - n_0 \right) \frac{h}{\delta^2} \vec{e}_z}$$

ou encore

$$\boxed{\vec{j}(z=h) \approx - \left(X n_\infty - n_0 \right) \frac{h}{\tau_c} \vec{e}_z}$$

Par définition d'une densité de courant de matière : $j = \frac{\delta^2 N}{\delta S \delta t}$

La réaction chimique $\text{Ca}^{2+} + 2\text{HCO}_3^- \rightleftharpoons \text{CaCO}_3 + \text{CO}_2$ montre que les nombres de CO_2 et celui de CaCO_3 sont égaux. Comme j ($y=h$) correspond par définition au $\frac{\delta^2 N}{\delta S \delta t}$ de CO_2 arrivant en $y=h$ il correspond aussi au $\frac{\delta^2 N}{\delta S \delta t}$ de CaCO_3 déposé en $y=h$

Ainsi $\frac{\delta^2 N}{\delta S \delta t} = -(\chi n_\infty - n_0) \frac{h}{\tau_c} = \sigma h$ avec

$$\sigma = \frac{n_0 - \chi n_\infty}{\tau_c}$$

II A 9) Le pH de l'eau = 9 ; la courbe fig 6 montre que $\sigma > 0$. Il y a effectivement dépôt de CaCO_3 - la stalactite grossit.

II B 1) On part de (2) : $R = l_c^{1/3} (R \sin \theta)^{-1/3}$ et (3) : $\frac{\delta^2 N}{\delta S \delta t} = \sigma h$

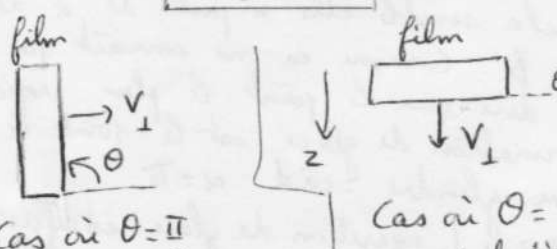
(3) $\Rightarrow \delta^2 N = \sigma \delta S h \delta t \stackrel{(2)}{=} \sigma \delta S l_c^{1/3} (R \sin \theta)^{-1/3} \delta t$

or $\delta^2 N = \frac{d^2}{dV_m} \cdot dS V_\perp \delta t$ car

d^2 particules CaCO_3 occupe le volume V_m et les $\delta^2 N$ particules qui traversent dS pendant δt avec la vitesse $V_\perp$ occupent le volume $dS V_\perp \delta t$.

d'où $\frac{d^2}{dV_m} dS V_\perp \delta t = \sigma \delta S l_c^{1/3} (R \sin \theta)^{-1/3} \delta t$

soit $V_\perp = \frac{V_m \sigma l_c^{1/3} (R \sin \theta)^{-1/3}}{d^2}$ OK
 $\hookrightarrow R = \frac{V_m \sigma l_c^{1/3}}{d^2}$

II B 2) 
 Cas où $\theta = \frac{\pi}{2}$
 La stalactite ne descend pas
 Cas où $\theta = 0$
 La stalactite descend à la vitesse $V_\perp$

On a donc $V_p = V_\perp \cos \theta$

II B 3) Partons de $V_\perp = \gamma (R \sin \theta)^{-1/3}$
 $V_p = \text{cte par hyp.}$; $V_p = V_\perp \cos \theta$ $\cos \theta = -\frac{dR}{dz}$

on arrive à : $V_p = \gamma (R \sin \theta)^{-1/3} \left(-\frac{dR}{dz}\right)$ (3)

avec $\sin \theta \approx 1$ $\frac{dR}{R^{1/3}} = -\frac{V_p}{\gamma} dz$ ($V = \text{cte par hyp.}$)
 ($\gamma = \text{cte aussi}$)

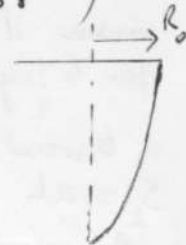
Intégrons : $\frac{R^{-1/3+1}}{-1/3+1} = -\frac{V_p}{\gamma} z + \text{cte}$

En $z=0$ $R=R_0$

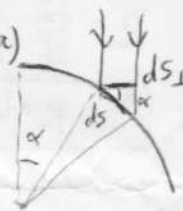
$$\frac{3}{2} (R^{2/3} - R_0^{2/3}) = -\frac{V_p}{\gamma} z$$

R ne varie pas linéairement
 $R = \left(R_0^{2/3} - \frac{2V_p}{3\gamma} z\right)^{3/2}$ il faut que $R_0^{2/3} - \frac{2V_p}{3\gamma} z > 0$

Alors :



III A.1) a)



L'eau qui tombe sur le cylindre de bois va augmenter le débit D_m du filet d'eau glissant sur le cylindre. La masse

reçue par dS pendant dt est par définition de j_m

$\delta m = j_m dS_\perp dt$ avec $j_m = \psi_m$

Or $dS_\perp = dS \cos \alpha$ et $dS = L d\alpha$

donc $\delta m = \psi_m L \cos \alpha d\alpha dt$

d'où la variation de débit massique du filet d'eau :

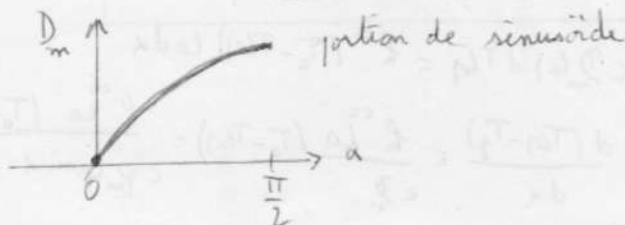
$$\frac{dD_m}{dt} = \frac{\delta m_{ajouté}}{\delta t} = \psi_m L \cos \alpha d\alpha \quad (\text{OK})$$

III A1) b) En $\alpha=0$ on est au point de symétrie. En effet D_m doit être une fonction paire de α donc $D_m = 0$ en $\alpha=0$ l'eau n'a pas de préférence pour couler à droite ou à gauche donc

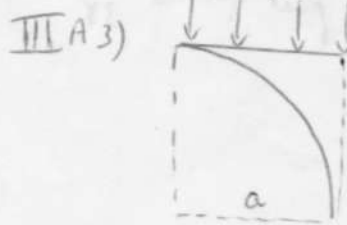
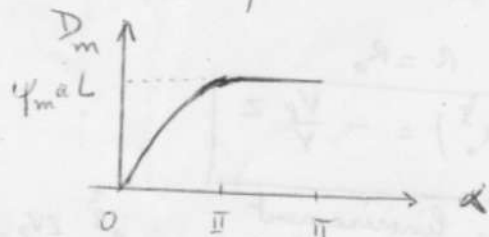


$D_m = 0$ en $\alpha=0$ (OK)

III A1) c) Intégrons : $D_m = \psi_m L \sin \alpha$



III A 2) Ce qui diffère d'avant, c'est que cette partie inférieure du cylindre ne reçoit plus d'eau. Comme la pesanteur est négligée et qu'on suppose que le fillet glisse toujours sur le cylindre, cela veut dire que $D_m = \text{cte}$. (cf



Globalement, la masse d'eau reçue par le cylindre ($\alpha \in [0, \pi]$) a travers la section $S_{\perp} = aL$

Par définition de j_m cela correspond à $\dot{m} = j_m a L dt$ d'où $D_m = \frac{dm}{dt} = j_m a L$

Comme $j_m = \psi_m$ on a bien $D_m = \psi_m a L$ (OK)

On vérifie bien sur la courbe que $D_m = \psi_m a L$ pour $\alpha = \pi$

III B 1) Logiquement, sans aucun transfert thermique, la t° est celle de la pluie :

$$T(\alpha) = T_g$$

III B 2) a) $H^*(t) = H + \underbrace{D_m(\alpha) dt c T(\alpha)}_{\substack{\uparrow \\ \text{enthalpie du syst. ouvert}}} + \underbrace{\psi_m L a \cos \alpha dx c T_g}_{\substack{\uparrow \\ \text{enthalpie de l'eau ruisselant de la pluie entrant à } \alpha \text{ pendant } dt}}$

$$H^*(t) = H + c dt [D_m(\alpha) T(\alpha) + \psi_m L a \cos \alpha T_g]$$

$$III B 2) b) H^*(t+dt) = H + c dt [D_m(\alpha+dx) T(\alpha+dx)]$$

(L'eau de pluie tombée pendant dt fait partie maintenant de $D_m(\alpha+dx)$).

$$III B 2) c) dH = \delta Q \text{ à pression constante}$$

$$\text{et } dH = H^*(t+dt) - H^*(t)$$

$$\text{d'où } c dt (D_m T) - \psi_m L a \cos \alpha T_g =$$

$$h^{cc} (T_a - T) L a dx dt$$

Remarquer que $\cos \alpha dx = d(\sin \alpha)$

$$\text{Ainsi } d(D_m T - \psi_m L a T_g \sin \alpha) = \frac{h^{cc}}{c} L a (T_a - T) dx$$

Avec $D_m = \psi_m L a \sin \alpha$ cela fait :

$$d((T - T_g) \sin \alpha) = \frac{h^{cc}}{c \psi_m} (T_a - T) = \beta (T_a - T)$$

III B 2) d) $\frac{dT}{dx}$ est contenu dans le vecteur

densité de courant thermique. Par symétrie il s'écoule de chaque côté du cylindre la même chaleur. Mais en $\alpha = 0$ elle ne peut être créée toute seule (il n'y a pas d'about) Donc $\frac{dT}{dx} = 0$ en $\alpha = 0$

$$(5) \text{ devient } \sin \alpha \frac{d(T - T_g)}{dx} + (T - T_g) \cos \alpha = \beta (T_a - T)$$

$$\text{En } \alpha = 0 \text{ cela donne } T(\alpha=0) = \frac{\beta T_a + T_g}{1 + \beta}$$

Si $\beta \ll 1$ alors $T(\alpha=0) = T_g$ indépendant de β

$$T(\alpha=0) = 274 \text{ K}$$

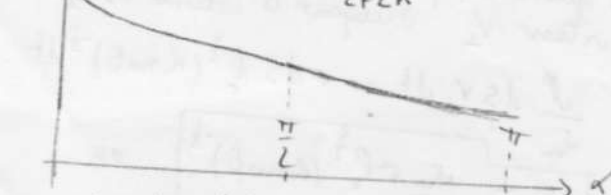
c'est ce qu'on observe sur la figure 8 si $\beta \ll 1$

III B 3) a) Intégrons $T = T_a + \text{cte} e^{-\beta \alpha}$

$$\text{avec } T(\frac{\pi}{2}) = T_a + \text{cte} e^{-\beta \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{d'où } T = T_a + (T(\frac{\pi}{2}) - T_a) e^{-\beta(\alpha - \frac{\pi}{2})}$$

on voit : $T(\frac{\pi}{2}) > T_a$ donc $T \searrow$ après $\frac{\pi}{2}$



III B 3) b) La t° de fusion de la glace est $T_f = 273 \text{ K}$

Le point le plus propice à la formation de la glace est celui où la t° est inférieure à 273 K

Cela semble être à partir de α dépendant de β . Comme on ne connaît pas β on va dire que le point le plus propice à la formation de glace est le point le plus bas du cylindre c-à-d $\alpha = \pi$.

III B 3) c) L'apparition de glace est favorisée si on remplace le bois par du métal. Celui-ci étant à la t° de l'air ($T_a < T_g$), comme il est bon conducteur thermique, il va prendre la chaleur de l'eau qui ruisselle (elle est tombée à $T_g > T_f$) et favoriser sa chute de t° donc la transformation en glace de la même façon lorsque nous touchons une barre métallique, le contact nous paraît "froid" car la

IV A.1) La stalactite de glace passe de rayon $R(t)$ à $R(t+dt)$. La masse de glace formée est donc $\delta m = 2\pi R dR \rho dZ$

A pression constante, $dH = \delta Q$
 Pour le changement d'état $dH = -\delta m L_f$
 - car passage de liquide à solide

$$dH = -\rho 2\pi R dR dZ L_f$$

$$\delta Q = -\rho 2\pi R dR dZ L_f$$

IV A.3) δQ est donnée dans l'énoncé:

$$\delta Q = h''(T_a - T_f) dS dt$$

$$\text{ici } dS = 2\pi R dZ$$

$$\text{Ainsi } -\rho 2\pi R dR dZ L_f = h''(T_a - T_f) 2\pi R dZ dt$$

$$\text{d'où } \frac{dR}{dt} = -\frac{h''(T_a - T_f)}{\rho L_f}$$

IV A.4) le cliché fig. 2 montre $\frac{\dot{L}}{\dot{R}} \neq 1$

$$\frac{\dot{L}}{\dot{R}} = \frac{5}{0,2} \leftarrow 5 \text{ cm de longueur formée}$$

$$\frac{\dot{L}}{\dot{R}} = 0,2 \leftarrow 2 \text{ mm de rayon formé}$$

$$\frac{\dot{L}}{\dot{R}} = 25$$

On en conclut que le modèle précédent ne convient pas du tout.

Mais ça paraît difficile de négliger la pesanteur!

IV B.1) Equation de la diffusion en régime stationnaire: $\Delta T = 0$

Equation de Poisson: $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ où

ρ est la densité volumique de charge

Cette équation est locale. Pour une charge ponctuelle, $\rho = 0$ en dehors de la source, c'est-à-dire en $r > 0$: on a $\Delta V = 0$

or le potentiel créé par une charge q est

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ avec la convention } V \rightarrow 0 \text{ à } r \rightarrow \infty$$

Par analogie on a le même genre de solution pour T . On peut toujours rajouter une constante puisque $\Delta(T_{\text{cte}}) = 0$

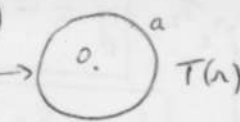
Ainsi $T(r) = \alpha + \frac{\beta}{r}$ convient

IV B.2) Conditions aux limites: $T(r=a) = T_f$
 $T(r \rightarrow \infty) = T_a$

$$\text{d'où } T(r) = T_a + \frac{\alpha(T_f - T_a)}{r}$$

IV B.3)

Pointe stalactite



Loi de Fourier
 $j = -\lambda \frac{dT}{dr}$

Le flux reçu par la sphère est $-j S_{\text{sphère}}$
 rigne - car $j > 0$ si dirigé vers l'extérieur

$$\Phi = -j(a) 4\pi a^2 = \lambda \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=a} 4\pi a^2$$

$$\Phi = \lambda 4\pi a^2 \left(-\frac{a}{r} \right) \left(\frac{T_f - T_a}{a} \right) = \lambda 4\pi a (T_a - T_f)$$

$$\text{On a bien } \Phi = G(T_a - T_f) \text{ avec } G = 4\pi \lambda a$$

$$\text{IV B.4) } \delta Q = \frac{1}{2} \Phi dt = \frac{1}{2} G(T_a - T_f) dt$$

$$\text{remplace } \delta Q = h''(T_a - T_f) dS dt$$

C'est maintenant l'extrémité de la stalactite qui gèle donc $dH = -\rho \pi a^2 dL L_f$

$$\text{d'où } -\rho \pi a^2 L_f dL = \frac{1}{2} G(T_a - T_f) dt$$

$$\rightarrow \frac{dL}{dt} = -\frac{G(T_a - T_f)}{2\rho \pi a^2 L_f}$$

Par rapport au résultat du IV A.3) tout se passe comme si h'' était remplacé par $\frac{G}{2\pi a}$ c'est-à-dire $\frac{2\lambda}{a}$

Le facteur d'amplification par rapport à la loi de Newton du IV A.3) est donc $\frac{2\lambda}{a h''}$

$$\frac{2\lambda}{a h''} = \frac{2 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-3} \times 10} = 0,4$$

Cela n'arrange rien.

IV B.5)

$$\Delta V = 0$$

$$\Delta T = 0$$

$$\vec{E} = -\text{grad} V$$

$$\vec{j} = -\lambda \text{grad} T$$

$$\vec{E} \rightarrow \frac{j_{th}}{\lambda}$$

IV B.6)

Si l'eau gèle sur un anneau au-dessus:



$$dH = -\rho (\pi (a+e)^2 - \pi a^2) L_f dL$$

$$\text{soit } dH = -\rho \pi a^2 \left(\left(1 + \frac{e}{a}\right)^2 - 1 \right) L_f dL \approx -\rho \pi a^2 \frac{2e}{a} L_f dL$$

$$dH = -\rho 2\pi a e L_f dL$$

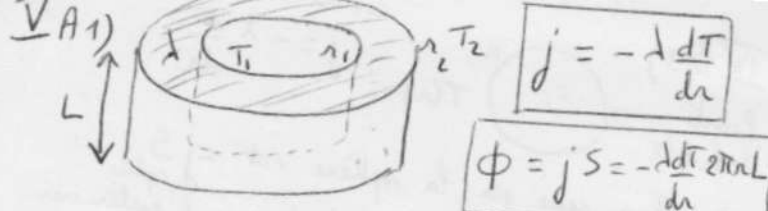
$$\text{d'où } -\rho 2\pi a e L_f dL = \frac{1}{2} G(T_a - T_f) dt$$

$$\rightarrow \frac{dL}{dt} = -\frac{G(T_a - T_f)}{4\rho \pi a e L_f}$$

Nouveau facteur d'amplification par rapport au IV A.3):

$$\frac{2\lambda}{2e h''} = \frac{10^{-2}}{80 \times 10^{-6} \times 10} \approx 12$$

Cela correspond davantage à l'observation.



Le flux Φ est constant en régime permanent quand il n'y a pas d'autres sources de chaleur.

On intègre: $T_2 - T_1 = - \frac{\Phi}{\lambda 2\pi L} \ln \frac{r_2}{r_1}$

On déduit $G = \frac{\Phi}{T_1 - T_2} = \frac{\lambda 2\pi L}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$

VA2) Au niveau de la stalactite de rayon R_- le film d'eau va de R_- à $R_- + h_-$ avec $h_- = l_c^{4/3} R_-^{-1/3}$ d'où (avec $L = \frac{\Lambda}{2}$)

$G_- = \frac{\lambda 2\pi \Lambda}{2 \ln \left(\frac{l_c^{4/3} R_-^{-1/3} + R_-}{R_-} \right)}$ soit $G_- \approx \frac{\lambda \pi \Lambda R_-^{1/3}}{l_c^{4/3}}$

De même $G_+ = \lambda \pi \Lambda \left(\frac{R_+}{l_c} \right)^{1/3}$

VA3) $R_+ > R_-$ $\frac{G_+ R_-}{G_- R_+} = \left(\frac{R_+}{R_-} \right)^{4/3} \frac{R_-}{R_+} = \left(\frac{R_+}{R_-} \right)^{1/3}$

donc $\frac{G_+ R_-}{G_- R_+} > 1$ donc $\frac{dR_+/dt}{dR_-/dt} > 1$

Le rayon R_+ va croître plus vite que R_- . Le phénomène de "bosses" va s'accroître.

VA4) $E_p = AS$ croît avec S . Or plus le rayon R est grand plus la surface glace-eau est grande puisque égale à $2\pi R \frac{\Lambda}{2}$.

La transformation d'eau en glace demande de l'énergie au système, de même que la tension superficielle. Ce qui modère la croissance radiale en glace de la stalactite des rayons R_+ par rapport aux rayons R_- .

La surface $2\pi R \frac{\Lambda}{2}$ est la même pour les rayons R_+ et R_- donc l'effet est indépendant des longueurs Λ .

B1) On se place dans l'observation Eulerienne ou on parle de "champ de température". L'équation de diffusion est $D_{th} \Delta T = \frac{dT}{dt}$ - variation de la T° entre t et $t+dt$ par Δx

particule fluide qui passe en Π à t :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} T$$

$$(T(x,t) \rightarrow dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x} dx \rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) T$$

$\frac{\partial T}{\partial t}$ est la variation locale de la T°

$\vec{v} \cdot \text{grad} T$ est le terme convectif de variation de

VB2) $D_{th} \Delta T \approx \vec{v} \cdot \text{grad} T$

En analyse dimensionnelle: $D_{th} \frac{T}{R_0} \sim u_m \frac{T}{\Lambda}$

on choisit Λ pour le terme convectif qui est lié à la direction du mouvement du fluide c'est $\vec{e}_z$ direction où on observe les ondes.

On choisit R_0 pour ΔT car c'est la température qui varie radialement, donc selon h .

$$\Lambda = \frac{u_m R_0^2}{D_{th}}$$

VB3) $\Lambda = 2,2 \times \frac{3 \times 10^{-2} \times 10^{-8}}{10^{-7}}$

$\Lambda = 6,6 \text{ mm}$

C'est à peu près conforme à l'observation d'une stalactite de glace