Physique 2

PC

2017

4 heures — Calculatrices autorisées

Interférométrie atomique

I Caractérisation de la source atomique

La production d'une vapeur atomique s'effectue en chauffant l'élément chimique pour atteindre une pression de vapeur saturante suffisante. Le lithium ayant une pression de vapeur saturante faible aux températures expérimentalement accessibles, on le vaporise dans un gaz d'argon sous haute pression, afin d'obtenir une surpression plus importante dans le four. Le mélange gazeux ainsi obtenu contient majoritairement de l'argon et une faible proportion de lithium. Ce gaz est ensuite accéléré à travers une tuyère de longueur nettement supérieure à sa section (figure 2) afin de former un jet atomique. On souhaite dans cette partie caractériser le jet atomique ainsi créé.

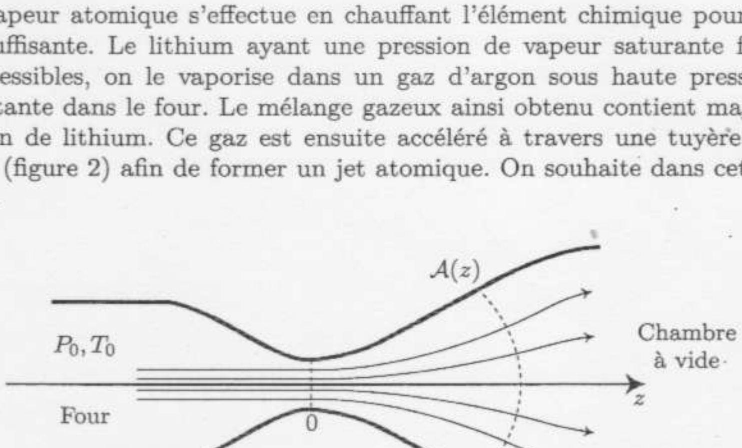

Figure 2 Schéma de la tuyère. On a représenté quelques lignes de l'écoulement ainsi que la surface $\mathcal{A}(z)$ perpendiculaire aux lignes de l'écoulement.

On considérera les hypothèses suivantes :

- dans le four, le gaz est à la pression P_0 et la température T_0 ;
- on suppose que le libre parcours moyen dans le four et dans la tuyère est très inférieur au diamètre de la tuyère. Cette hypothèse permet de décrire le fluide comme un milieu continu et d'utiliser les lois de la dynamique des fluides ;
- les différentes quantités physiques qui décrivent l'écoulement (pression $P(z)$, température $T(z)$, masse volumique $\rho(z)$, enthalpie massique $h(z)$, vitesse $v(z)$) ont même valeur en tout point de la surface $\mathcal{A}(z)$ qu'occupe le fluide, perpendiculairement aux lignes de l'écoulement (figure 2). Dans la mesure où le diamètre de la tuyère varie lentement avec z, on assimile la surface $\mathcal{A}(z_0)$ au plan $z = z_0$. Cette approximation entraine que les composantes transversales de $\vec{v}$ sont partout négligeables devant la composante de $\vec{v}$ selon l'axe Oz ;
- l'écoulement est supposé unidimensionnel le long de l'axe z, stationnaire et parfait ;
- le gaz est supposé parfait, monoatomique, de masse molaire $M = 0{,}040\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}$ et de coefficient adiabatique $\gamma = 5/3$ supposé indépendant de la température ;
- la vitesse moyenne v_0 des atomes dans le four est négligée devant la vitesse des atomes dans le jet.

On notera $r = \dfrac{R}{M}$, où R est la constante des gaz parfaits.

On donne les paramètres de l'expérience suivants :

- diamètre de col de la tuyère $\phi_{\text{col}} = 100\,\mu\mathrm{m}$;
- température du gaz dans le four $T_0 = 1080\,\mathrm{K}$;
- pression du gaz dans le four $P_0 = 250\,\mathrm{mbar}$.

I.A – Réalisation d'un jet supersonique

I.A.1) Que peut-on dire du débit massique $\mathcal{D}_m$ de cet écoulement ? Comment s'exprime-t-il en fonction de $\rho(z)$, $v(z)$ et $\mathcal{A}(z)$.

I.A.2) Écrire la relation reliant $P(z)$, $\rho(z)$ et $T(z)$. Exprimer la variation $\mathrm{d}h$ de l'enthalpie massique du gaz en fonction de γ, r et de la variation $\mathrm{d}T$ de sa température.

I.A.3) Les transferts thermiques entre le gaz et les parois de la tuyère sont négligeables, de sorte que le gaz s'écoule selon une transformation adiabatique et réversible. En déduire une relation entre $P(z)$ et $\rho(z)$ ainsi qu'une relation entre $\mathrm{d}h$, $\rho(z)$ et $\mathrm{d}P$.

I.A.4) Les forces de pesanteur étant négligées devant les forces pressantes exercées sur le fluide, relier la vitesse $v(z)$ à l'enthalpie massique $h(z)$ à la position z et à l'enthalpie massique h_0 dans le four.

I.A.5) On rappelle que la célérité du son c_s dans un gaz est reliée à sa masse volumique ρ et sa compressibilité isentropique $\chi_S = \dfrac{1}{\rho}\left.\dfrac{\partial\rho}{\partial P}\right|_S$ par $c_s = \dfrac{1}{\sqrt{\rho\chi_S}}$.

Donner l'expression de la célérité du son dans la tuyère $c_s(z)$ à l'abscisse z en fonction de γ, r et $T(z)$.

Dans la suite, on notera $\mathcal{M}(z)$ le rapport de la vitesse des atomes du jet $v(z)$ sur la célérité du son à l'abscisse z, appelé le nombre de Mach

$$\mathcal{M}(z) = \frac{v(z)}{c_s(z)}$$

I.A.6) À partir de l'ensemble des relations précédentes, établir la relation suivante, connue sous le nom de *relation de Hugoniot* :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathcal{A}(z)} + \frac{\mathrm{d}v}{v(z)}\left(1 - \mathcal{M}^2(z)\right) = 0$$

I.A.7) L'écoulement est appelé subsonique, ou supersonique, selon que $v < c_s$, ou $v > c_s$. Déduire de la relation de Hugoniot que, pour passer d'un écoulement subsonique à un écoulement supersonique, la section de la tuyère doit nécessairement comporter un minimum. Que vaut le nombre de Mach à cet endroit ?

I.B – Estimation des grandeurs thermodynamiques à l'issue de l'expansion

I.B.1) Exprimer la température $T(z)$ du gaz en fonction de T_0, γ et du nombre de Mach $\mathcal{M}(z)$. Comment la température évolue-t-elle dans la direction z du jet ?

I.B.2) Exprimer la densité atomique du jet $\rho(z)$ en fonction de ρ_0, γ et du nombre de Mach $\mathcal{M}(z)$. Pourquoi peut-on considérer qu'à l'issue de la phase d'expansion, lorsque z est suffisamment grand, la température et la vitesse des atomes du jet n'évoluent plus. Le nombre de Mach atteint à l'issue de la phase d'expansion sera noté par la suite $\mathcal{M}_\infty$.

I.B.3) Exprimer de même la vitesse du jet $v(z)$ en fonction de T_0, γ, r et du nombre de Mach $\mathcal{M}(z)$. En supposant que $\mathcal{M}_\infty$ est grand devant une quantité que l'on précisera, montrer que la vitesse atteinte en sortie de la tuyère v_∞ ne dépend pas de $\mathcal{M}_\infty$ et donner son expression en fonction de T_0, γ et r. L'évaluer numériquement.

I.B.4) On donne sur la figure 3 les résultats de mesures du nombre de Mach terminal $\mathcal{M}_\infty$ obtenus par une expérience similaire, mais pour des paramètres expérimentaux différents. En déduire une estimation de la valeur de $\mathcal{M}_\infty$ pour les paramètres de l'expérience étudiée, puis de la valeur de la température T_∞ atteinte à l'issue de l'expansion. L'hypothèse faite à la question précédente est-elle vérifiée ?

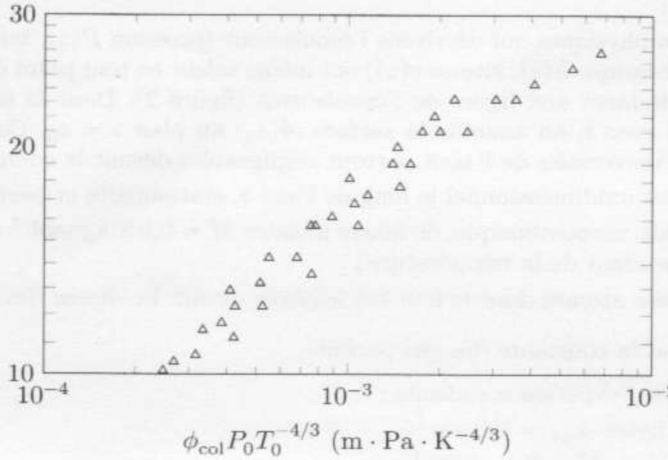

Figure 3 Nombre de Mach atteint à l'issue de l'expansion en fonction des paramètres de la source

A

1) Ecoulement stationnaire $\Rightarrow \boxed{D_m = cte}$

$\boxed{D_m = \rho v \mathcal{A}}$

2) G.P : $\rho = \frac{PM}{RT}$ $\boxed{\rho = \frac{P}{rT}}$

$dh = c_{p_{massique}}\, dT = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)}\, dT$

$\boxed{dh = r\frac{\gamma}{\gamma-1}\, dT}$

3) Adiab. réversible de GP $\Rightarrow PV^\gamma = cte$

ou aussi $\boxed{P\rho^{-\gamma} = cte = P_0\rho_0^{-\gamma}}$

Différentier logarithmiquement $P^{1-\gamma}T^\gamma = cte$

$\rightarrow (1-\gamma)\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dT}{T} = 0$

Déduire dT en fonction de dP et l'injecter dans dh $\rightarrow$

$\frac{dT}{T} = \frac{(\gamma-1)}{\gamma}\frac{dP}{P} \rightarrow dh = rT\frac{dP}{P}$

Utiliser 2) pour éliminer $\frac{T}{P}$

$\rightarrow dh = \frac{r\,dP}{\rho r} \rightarrow \boxed{dh = \frac{dP}{\rho}}$

4) Pour un écoulement dans une tuyère, le 1er principe de la thermo mène à :

$h - h_0 + \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = w_{tuyere} + q$ (adiab.)

$w_{tuyere} = 0$ car il n'y a aucun élément mécanique à entraîner

Ici $v_0 = 0$ (bien que je ne le vois pas explicitement dit)

$\rightarrow -(h-h_0) = \frac{1}{2}v^2 \rightarrow \boxed{v = \sqrt{2(h_0-h)}}$

5) $\chi_s = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s$ avec $P\rho^{-\gamma} = cte$

qu'on différentie logarithmiquement

$\frac{dP}{P} - \gamma\frac{d\rho}{\rho} = 0$ d'où $\chi_s = \frac{1}{\gamma P}$

$\rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{\gamma P}}} = \sqrt{\gamma r T}$ $\boxed{c = \sqrt{\gamma r T}}$

6) $D_m = \rho v \mathcal{A} = cte \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{A}} = 0$

Il faut exprimer $\frac{d\rho}{\rho}$

De $P\rho^{-\gamma} = cte$ on a $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{\gamma P}$

de $P^{1-\gamma}T^\gamma = cte$ on a $(1-\gamma)\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dT}{T} = 0$

d'où $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{1-\gamma}\frac{dT}{T}$

De $dh = \frac{r\gamma}{\gamma-1}dT$

$\Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dh}{r\gamma T}$

De $v^2 = 2(h_0 - h)$ on a $2v\,dv = -2\,dh$

c.à.d $v\,dv = -dh$

d'où $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{v\,dv}{r\gamma T} = -\frac{v\,dv}{c^2} = -\mathcal{M}^2\frac{dv}{v}$

Je remplace $\frac{d\rho}{\rho}$ dans $\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{A}} = 0$

$\rightarrow -\mathcal{M}^2\frac{dv}{v} + \frac{dv}{v} + \frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{A}} = 0$

on a bien $\boxed{\frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{A}} + \frac{dv}{v}(1-\mathcal{M}^2) = 0}$ (OK)

7) limite sub et supersonique : $\mathcal{M} = 1$

si $\mathcal{M} = 1$ alors $d\mathcal{A} = 0$

La section passe par un extremum.

subsonique : $v < c \xrightarrow{\mathcal{M}^2<1} \frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{A}} = -A^2\frac{dv}{v}$

supersonique : $v > c \xrightarrow{\mathcal{M}^2>1} \frac{d\mathcal{A}}{\mathcal{A}} = +B^2\frac{dv}{v}$

le passage sub à supersonique oblige $v \nearrow$

d'abord subsonique, $v \nearrow \Rightarrow \mathcal{A} \searrow$

Puis supersonique, $v \nearrow \Rightarrow \mathcal{A} \nearrow$

$\mathcal{A}$ est donc passé par un minimum

$\boxed{\mathcal{M} = 1 \text{ au minimum de la section } \mathcal{A}}$

B 1) $dh = c_{p\,mass}\, dT = \frac{\gamma r\, dT}{(\gamma-1)}$

$v^2 = 2(h_0 - h) \rightarrow 2v\,dv = -2dh$

d'où $\frac{\gamma r}{\gamma-1}\, dT = -v\,dv$

Intégrons $\frac{\gamma r}{\gamma-1}(T - T_0) = -\frac{v^2}{2}$ $(v_0 = 0)$

Avec $\mathcal{M}^2 = \frac{v^2}{c^2}$ on remplace $v^2 = \mathcal{M}^2 c^2$

d'où $\frac{\gamma r}{\gamma-1}(T - T_0) = -\frac{\mathcal{M}^2 c^2}{2}$

Mais $c^2 = \gamma r T$ donc $\frac{\gamma r}{\gamma-1}(T - T_0) = -\frac{\mathcal{M}^2 \gamma r T}{2}$

d'où $T\left[\frac{\gamma r}{\gamma-1} + \frac{\mathcal{M}^2 \gamma r}{2}\right] = \frac{\gamma r}{\gamma-1} T_0$

soit $\boxed{T = \frac{T_0}{1 + \frac{\mathcal{M}^2(\gamma-1)}{2}}}$

D'après le schéma fig. 2 le jet passe par un minimum de ct donc passe de sub à supersonique

donc $v \nearrow$

Si $c \searrow$ alors $\mathcal{M} \nearrow$; $\mathcal{M}^2 \nearrow$ aussi

Comme $\gamma > 1$ $T \searrow$

Comme $c = \sqrt{\gamma r T}$, si $T \searrow$ on a bien c qui diminue

L'hypothèse a priori de $c \searrow$ est correcte.

Donc finalement $\boxed{T \searrow \text{ dans la direction du jet}}$

ce qui peut paraître normal car si le gaz gagne en énergie cinétique il faut bien qu'il perde ailleurs et cette perte sera une diminution de son enthalpie.

2) $T \rho^{1-\gamma} = cte$ (ad. rév. GP)

$\frac{T}{T_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1-\gamma} = 1$

$\boxed{\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\mathcal{M}^2(\gamma-1)}{2}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}}$

La vitesse v du gaz ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière ! donc même si $v \nearrow$, il atteindra une limite supérieure ; donc $\mathcal{M} < \mathcal{M}_\infty$ avec $\mathcal{M}_\infty$ valeur finie

$T \longrightarrow \frac{T_0}{1 + \frac{\mathcal{M}_\infty^2(\gamma-1)}{2}}$ quand $z \longrightarrow \infty$

T n'évolue plus.

3) De $c^2 = \gamma r T$ et de $\mathcal{M}^2 = \frac{v^2}{c^2}$ on a

$v^2 = \mathcal{M}^2 \gamma r T$

$\boxed{v^2 = \frac{\mathcal{M}^2 \gamma r\, T_0}{1 + \frac{\mathcal{M}^2(\gamma-1)}{2}}}$

Si $\frac{\mathcal{M}_\infty^2(\gamma-1)}{2} \gg 1$ càd $\mathcal{M}_\infty^2 \gg \frac{2}{\gamma-1}$

alors $v_\infty^2 \simeq \frac{\mathcal{M}_\infty^2 \gamma r T_0}{\frac{\mathcal{M}_\infty^2(\gamma-1)}{2}} = \frac{2\gamma r T_0}{\gamma-1}$

$\boxed{v_\infty = \sqrt{\frac{2\gamma r T_0}{\gamma-1}}}$ indépendant de $\mathcal{M}_\infty$

AN : $\underline{v_\infty} = \sqrt{\frac{2 \times \frac{5}{3} \times 8{,}31 \cdot 1080}{\left(\frac{5}{3}-1\right) \cdot 0{,}040}} = \underline{1059 \text{ m.s}^{-1}}$

4) $\gamma - 1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

Pour les paramètres de l'expérience ;

$\Phi_{col} = 100\ \mu m$ $P_0 = 250$ mbar $T_0 = 1080$ K

donc $\Phi_{col} P_0 T_0^{-\frac{4}{3}} = 10^{-4} \times 250 \cdot 10^2 \times 1080^{-\frac{4}{3}}$

$= 2{,}26 \cdot 10^{-4}$

On lit sur le graphe $\boxed{\mathcal{M}_\infty = 10}$

Alors $T_\infty = \frac{T_0}{1 + \frac{100}{2}(5/3 - 1)} = \frac{T_0}{1 + \frac{100}{3}} = \frac{T_0}{1 + 33{,}3} \simeq \frac{T_0}{33{,}3}$

$\underline{T_\infty} = \frac{1080}{34{,}3} = \underline{31 \text{ K}}$ on a bien $33{,}3 \gg 1$ (approximation correcte)