

Partie II - Étude expérimentale des ondes de surface

L'étude de la lumière diffusée par une interface liquide-air permet de mesurer le coefficient de tension superficielle et la viscosité du liquide.

Pour rendre compte de la diffusion de la lumière par la surface libre du liquide, on adopte le modèle suivant :

- La surface est assimilée à un réseau par réflexion, dont les traits infiniment fins selon u_x et de longueur $L = 1$ cm selon u_x sont centrés sur les points A_n de coordonnées :

$$x_n = \frac{n\Lambda}{2} ; y_n = 0 ; z_n(t) = (-1)^n h_M \sin(\Omega t) \text{ avec } n \text{ entier} \quad \Lambda = 4 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

- Les traits sont éclairés par une onde plane d'éclairement $\mathcal{E}_0$, de longueur d'onde $\lambda_0 = 0,638 \mu\text{m}$ de pulsation ω_0 , et de vecteur d'onde

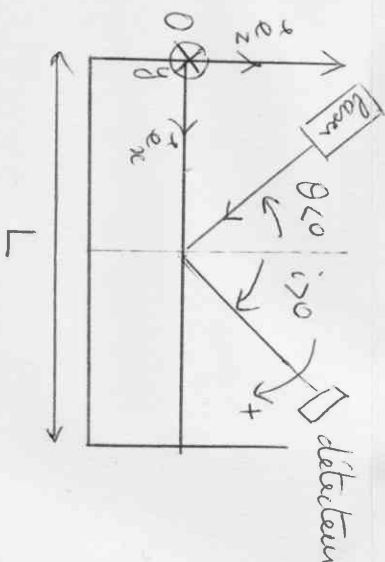
$$\vec{k}_0 = -k_0 \sin \theta u_x - k_0 \cos \theta u_z.$$

- On récupère la lumière diffractée à l'infini dans la direction d'angle i à l'aide d'un photodétecteur.

- On fixe une phase de référence ϕ_0 au niveau du détecteur pour l'onde de référence qui serait diffractée par un trait fictif, confondu avec l'axe Oy .

- Le n -ième trait diffracte une onde dont l'amplitude complexe sur le détecteur est de la forme : $q_n(t) = \alpha_n \mathcal{E}_0 \exp(j\omega_0 t - j\phi_0 - jk\delta_n)$ où $\alpha_n \approx 0,1$ est un nombre

sans dimension, k le nombre d'onde et δ_n est la différence de marche entre l'onde (n) et l'onde de référence définie plus haut.



II.A. - luer le nombre N de traits du réseau pour $L = 1$ cm et $\Lambda = 4 \cdot 10^{-5}$ m. Comparer avec les réseaux usuels utilisés en travaux pratiques. On supposera N pair dans la suite.

II.B. - On suppose tout d'abord que $h_M = 0$. Dans ces conditions la lumière diffractée a même pulsation ω_0 que l'onde incidente et donc $k = k_0 = 2\pi/\lambda_0$.

II.B.1) Établir l'expression de $\delta = \delta_n - \delta_{n-1}$ en fonction de Λ , i et θ .

II.B.2) Dans la suite, le détecteur est placé dans une direction d'observation i^* , choisie de telle sorte que :

$$\sin i^* + \sin \theta = -\frac{\lambda_0}{\Lambda}.$$

Combien vaudraient alors δ et l'éclairement reçu par le détecteur ?

II.B.3) Déterminer l'écart angulaire $\delta i^* = i^* - |\theta| = i^* + \theta$, supposé petit, entre l'onde réfléchie dans la direction $i = -\theta$ et l'onde diffractée dans la direction i^* , en fonction de θ , λ_0 et Λ . Le détecteur a une ouverture angulaire égale à 5° . Comment faut-il choisir θ pour ne récupérer que la lumière diffractée ?

II.C. - On suppose désormais que $h_M \neq 0$ et on admet qu'on peut prendre $k = k_0 = 2\pi/\lambda_0$ pour le vecteur d'onde de la lumière diffractée avec une très bonne approximation.

II.C.1) Faire apparaître la différence de marche $\delta_{2p}(t)$ des traits d'indice pair sur une figure. On pose $k = k_0 \cos i^* u_z + k_0 \sin i^* u_x$. Montrer que :

$$k_0 \delta_{2p}(t) = (\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{OA}_{2p}.$$

Expliciter $\delta_{2p}(t)$ en fonction de p , λ_0 , θ , h_M , Ω , t en tenant compte du fait que $\cos i^* = \cos \theta$ et $\sin i^* + \sin \theta = -\lambda_0/\Lambda$. En déduire l'amplitude complexe instantanée totale diffractée par les traits d'indices pairs, notée $q_{\text{pair}}(i^*, t)$, en fonction de L , Λ , $\mathcal{E}_0$, α , θ , h_M , Ω , k_0 , ω_0 , ϕ_0 et t .

II.C.2) Évaluer de même l'amplitude complexe instantanée totale diffractée par les traits d'indices impairs, notée $q_{\text{impair}}(i^*, t)$.

II.C.3) En déduire que l'amplitude complexe instantanée totale diffractée dans la direction i^* vaut :

$$q(i^*, t) = \left(\frac{2L\alpha\sqrt{\mathcal{E}_0}}{\Lambda} \right) \sin(2k_0 \cos \theta h_M \sin(\Omega t)) \exp(j\omega_0 t - j\phi_0 + j\pi/2)$$

où on rappelle que l'angle i^* est déterminé par le choix de Λ (cf. II.B.2).

II.C.4) Sachant que $h_M/\lambda_0 = 10^{-6}$, donner l'expression de $q(i^*, t)$ à l'ordre un en h_M/λ_0 . Montrer que $q(i^*, t)$ est la somme de deux ondes sinusoïdales et déterminer leurs pulsations en fonction de ω_0 et Ω . Quelle erreur relative sur k a-t-on commise en prenant $k = k_0 = 2\pi/\lambda_0$ pour ces deux ondes ?

$$\mathcal{Q} = 5,2 \cdot 10^5 \text{ } ^\circ -1$$

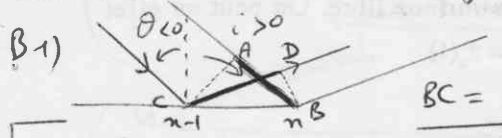
IIA

L'incré place les traits en $x = n \frac{\Lambda}{2}$

$$\text{Alors } N = \frac{L}{\frac{\Lambda}{2}} = \frac{2L}{\Lambda} = \frac{2 \times 1}{4 \cdot 10^{-3}} = 500 \text{ traits}$$

Les réseaux usuels de TP ont ~ 500 traits/mm soit environ 10000 traits (largeur réseau ~ 2 cm)

II B.1)



$$\delta = \delta_n - \delta_{n-1} = AB - CD = \frac{\Lambda}{2} (-\sin \theta - \sin i)$$

$(\theta < 0) \quad (i > 0)$

II B.2) On impose $\sin i^* + \sin \theta = -\frac{\lambda_0}{\Lambda}$ c-à-d

$$\delta = \frac{\lambda_0}{2}$$

Si d'un trait à l'autre, la différence de marche obtenue est un demi-critère de longueur d'onde, alors l'amplitude résultante est nulle et aussi l'éclairement

L'éclairement reçu est nul

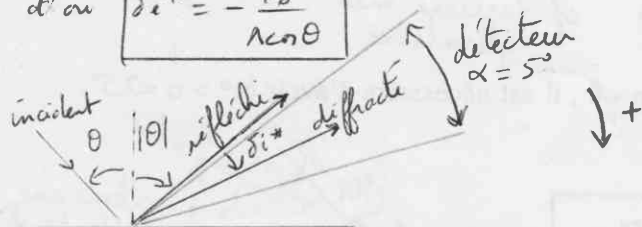
II B.3) Posons $i^* = \delta i^* + |\theta| = \delta i^* - \theta$

et remplaçons i^* dans $\sin i^*$

$$\sin i^* = \sin(\delta i^* - \theta) \approx \cos \theta \delta i^* - \sin \theta$$

alors $\sin i^* + \sin \theta = -\frac{\lambda_0}{\Lambda}$ devient $\cos \theta \delta i^* = -\frac{\lambda_0}{\Lambda}$

$$\text{d'où } \delta i^* = -\frac{\lambda_0}{\Lambda \cos \theta}$$



Le détecteur ne doit pas capter le rayon réfléchi, il faut donc que $\frac{\alpha}{2} \leq |\delta i^*|$

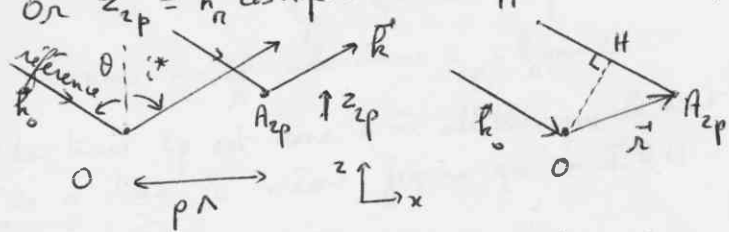
Du coup $\frac{\alpha}{2} \leq \frac{\lambda_0}{\Lambda \cos \theta}$ soit $\cos \theta \leq \frac{2 \lambda_0}{\alpha \Lambda}$

AN: $\cos \theta \leq \frac{2 \times 0,638 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10^{-5}}$ données en tout début d'énoncé

180
 $|\theta| \geq 68^\circ$ c-à-d $\theta \leq -68^\circ$

II C.1) Avec le $p^{\text{ème}}$ trait en $x = n \frac{\Lambda}{2}$ on a Λ entre 2 traits pairs successifs.

δ_{2p} est par définition "la différence de marche entre l'onde diffractée par le trait $2p$ et l'onde de référence qui serait diffractée par un trait fictif confondu avec 0"



Or le déphasage entre 2 ondes de même direction k est $k \cdot \vec{r}$; en effet il est égal à $k_0 \cdot \vec{HA}_{2p} = k_0 \cdot \vec{OA}_{2p} = k_0 \cdot \vec{r}$

On remarque que pour l'onde diffractée le déphasage est inversé donc le déphasage total est $(k_0 - k) \cdot \vec{OA}_{2p}$

Par définition, différence de marche et déphasage sont reliés par $\varphi = k_0 \delta$
d'où $k_0 \delta_{2p} = (k_0 - k) \cdot \vec{OA}_{2p}$ (OK)

$\vec{k}_0$	$\vec{OA}_{2p}$	$\vec{k}$
$\begin{vmatrix} -k_0 \sin \theta \\ -k_0 \cos \theta \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} p\Lambda \\ k_n \sin 2t \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} k \sin i^* \\ k \cos i^* \end{vmatrix}$
donné en II		

donc $k_0 \delta_{2p} = k_0 p\Lambda (-\sin \theta - \sin i^*) + k_n \sin 2t (-\cos \theta - \cos i^*)$

soit $\delta_{2p} = p\lambda_0 - 2k_n \sin 2t \cos \theta$ avec les hyp. $\cos i^* = \cos \theta$ et $\sin i^* + \sin \theta = -\frac{\lambda_0}{\Lambda}$

On reprend l'amplitude a donnée dans l'énoncé et on y remplace δ_n pour $n = 2p$
d'où $a_{2p}(t) = \alpha \sqrt{\epsilon_0} \exp(j\omega_0 t - j\varphi_0 - jk_0 p\lambda_0 + jk_n 2h \sin 2t \cos \theta)$

Remarquons que $\exp(-jk_0 p\lambda_0) = 1$ car $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

donc $a_{2p}(t) = \alpha \sqrt{\epsilon_0} \exp(j\omega_0 t - j\varphi_0 + jk_n 2h \sin 2t \cos \theta)$

Pour tous les traits d'indice pair on ajoute les amplitudes. On remarque que tous les traits d'indice pair ont le même δ_{2p} , donc le même a_{2p} . Il suffit de multiplier par le nombre de traits d'indice pair: il y en a $\frac{L}{\Lambda}$ (Λ est la distance séparant 2 traits pairs successifs)

donc $a_{\text{pair}}(t) = \frac{L}{\Lambda} \alpha \sqrt{\epsilon_0} \exp(j\omega_0 t - j\varphi_0 + jk_n 2h \sin 2t \cos \theta)$

II C2) De même pour les traits d'indice impair qui eux sont à l'altitude de

$$z_{p+1} = (-1)^{2p+1} h_n \quad \sin 2t = -h_n \sin 2t$$

Il suffit d'inverser le signe de h_n mais aussi de remarquer $\exp(-j h_0 (p + \frac{1}{2}) h_0) = -1$

$$\underline{a}_{\text{impair}}(t) = -\frac{L}{\Lambda} \alpha \sqrt{\epsilon_0} \exp(j\omega_0 t - j\varphi_0 - j h_0^2 2h_n \sin 2t \cos \theta)$$

II C3) L'amplitude totale diffractée est donc

$$\underline{a} = \underline{a}_{\text{impair}} + \underline{a}_{\text{pair}}$$

$$\underline{a} = \frac{L}{\Lambda} \alpha \sqrt{\epsilon_0} \exp(j\omega_0 t - j\varphi_0) \times 2j \sin(h_0^2 2h_n \sin 2t \cos \theta)$$

Comme $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ on peut aussi écrire : (OK)

$$\underline{a} = \frac{2L\alpha\sqrt{\epsilon_0}}{\Lambda} \sin(2h_0 \cos \theta h_n \sin 2t) \exp(j\omega_0 t - j\varphi_0 + j\frac{\pi}{2})$$

II C4) $h_0 h_n = \frac{2\pi}{\lambda_0} h_n \ll 1$ on confond $\sin$ avec son argument

$$\underline{a} \approx \frac{2L\alpha\sqrt{\epsilon_0}}{\Lambda} 2h_0 h_n \cos \theta \sin 2t \exp(j\omega_0 t - j\varphi_0 + j\frac{\pi}{2})$$

Puis on sépare $\sin 2t$ en 2 termes complexes

$$\sin 2t = \frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j} \quad \text{d'où}$$

$$\underline{a} \approx \frac{2L\alpha\sqrt{\epsilon_0}}{\Lambda} h_0 h_n \cos \theta \left[e^{j(\omega_0 + 2)t - j\varphi_0} - e^{j(\omega_0 - 2)t - j\varphi_0} \right]$$

$\underline{a}$ est bien la somme de 2 ondes sinusoïdales de pulsation $\omega_0 + 2$ et $\omega_0 - 2$.

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= \frac{\omega_0}{c} \\ h &= \frac{\omega_0 + 2}{c} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta h}{h_0} = \frac{2}{\omega_0} = \frac{5,2 \cdot 10^5}{2\pi \times 3,10^8} = \frac{0,638 \cdot 10^{-6}}{0,638 \cdot 10^{-6}}$$

$$\frac{\Delta h}{h_0} \approx 10^{-10}$$

donné en début exercice

II C5) $\underline{a}$ varie comme $\cos \theta$: $\underline{a} \searrow$ si $\theta \nearrow$
comme $0 < \theta$ $\underline{a} \searrow$ si $|\theta| \nearrow$

En II B.3) on a vu qu'il ne fallait pas dépasser -68° ($\theta \leq -68^\circ$) donc $|\theta| \geq 68^\circ$ pour ne pas voir le rayon réfléchi.

Mais si on prend $|\theta|$ trop grand, l'amplitude diffractée diminue, on perd en intensité. Il faut donc choisir $|\theta|$ dans les 68° .