

Partie II – La fibre optique

Dans toute cette partie, on notera $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ la célérité de la lumière dans le vide.

II.1 – Généralités

- Q15.** Énoncer les lois de Snell – Descartes relatives à la réflexion et à la réfraction de la lumière en les accompagnant de schémas.
- Q16.** Lors d'une séance de travaux pratiques, on dispose d'un disque métallique gradué en degrés, d'un laser et d'un demi-cylindre de plexiglas dont la face plane est confondue avec un diamètre du disque métallique. La lumière du laser arrive sur la face courbe du demi-cylindre de plexiglas suivant un de ses rayons comme indiqué en **figure 4**. Le demi-cylindre peut pivoter sur le disque métallique autour de l'axe (Oz), O étant le centre du disque.

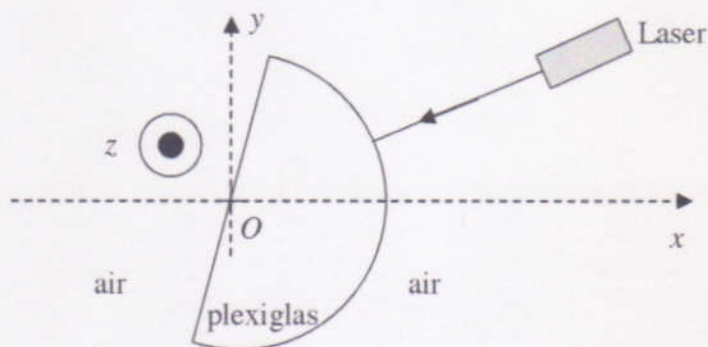


Figure 4 – Expérience avec un demi-cylindre en plexiglas

Reproduire la **figure 4** et tracer les rayons réfractés et réfléchis issus du laser. Quelles lois peut-on vérifier avec cette expérience ? Quel phénomène pourra être mis en évidence à l'occasion de cette expérience ? Pourquoi utiliser un laser comme source lumineuse ?

II.2 – La fibre optique à saut d'indice

Une fibre optique à saut d'indice, représentée en **figure 5**, est constituée d'un cœur cylindrique transparent d'indice $n_c = 1,500$ et de rayon r_c , entouré d'une gaine transparente d'indice $n_g = 1,485$. L'axe Ox de la fibre est normal au dioptre air-cœur. En raison de la symétrie de révolution de la fibre autour de l'axe Ox , on se restreint à une étude dans le plan (xOy) .

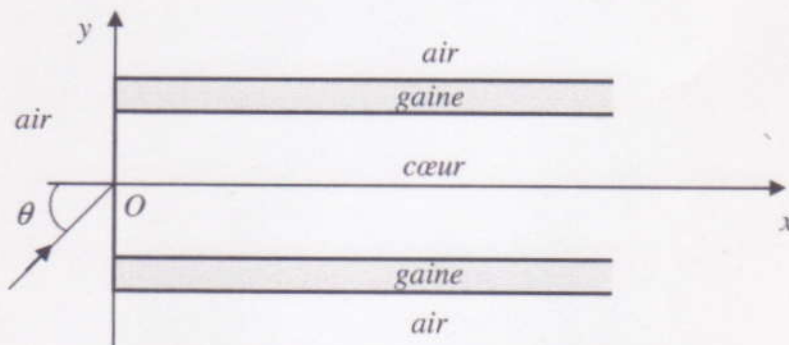


Figure 5 – Fibre optique à saut d'indice

Q17. Un rayon lumineux monochromatique se propageant dans l'air, situé dans le plan (xOy) , pénètre dans le cœur de la fibre en O avec un angle d'incidence θ . Montrer que le rayon reste dans le cœur si l'angle θ est inférieur à un angle limite θ_L , appelé angle d'acceptance de la fibre optique, dont vous donnerez l'expression en fonction de n_c et de n_g . Calculer la valeur de θ_L . L'indice de l'air vaut $n_a = 1,000$.

On considère maintenant une fibre optique de longueur L . Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable compris entre 0 et θ_L .

Q18. Quel est le rayon qui traverse le plus rapidement la fibre ? Exprimer, en fonction de L , c et n_c , la durée de parcours T_1 de ce rayon.

Q19. Quel est le rayon qui met le plus de temps à traverser la fibre ? Exprimer, en fonction de L , c , n_g et n_c , la durée de parcours T_2 de ce rayon.

Q20. En déduire l'expression de l'intervalle de temps $\delta T = T_2 - T_1$ en fonction de L , c , n_g et n_c . On

posera $2 \cdot \Delta = 1 - \left(\frac{n_g}{n_c} \right)^2$ avec $\Delta \ll 1$. Dans ces conditions, exprimer δT en fonction de L , c , n_c et Δ . Calculer la valeur de δT pour $L = 10$ km.

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse de durée τ_e , représentée en **figure 6**, formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et θ_L .

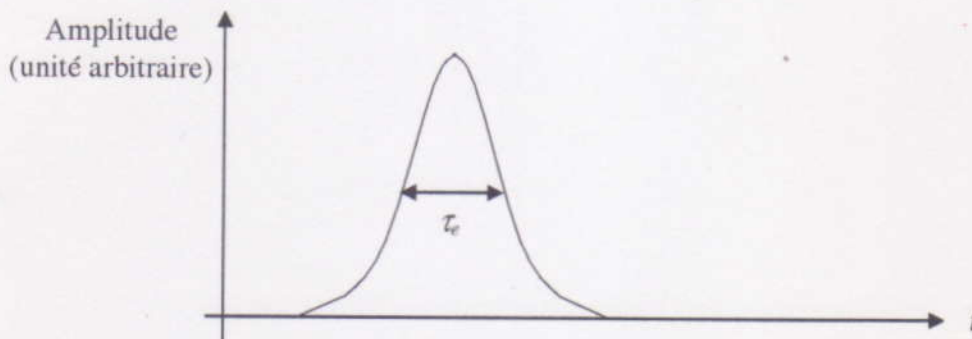


Figure 6 – Impulsion lumineuse en entrée de fibre optique

- Q21.** Reproduire la **figure 6**. Représenter l'allure de l'impulsion en sortie de fibre. Préciser sa durée approximative τ_s . On négligera ici tout phénomène d'absorption de la lumière par la fibre.
- Q22.** Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses, appelées bits, périodiquement avec une fréquence f . En supposant τ_e négligeable devant δT , quelle est la fréquence maximale de transmission f_{max} qui empêche le recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre ?
- Q23.** En considérant L_{max} la longueur maximale de fibre optique qui permet d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions, on définit le produit $B = L_{max} \cdot f$ comme étant la bande passante de la fibre optique. Exprimer B en fonction de c , n_c et Δ . Expliquer l'intérêt d'introduire cette grandeur. Pour un débit de 100 Mbits par seconde, évaluer et commenter la longueur maximale de fibre optique que l'on peut utiliser pour transmettre le signal.

II.3 – La fibre optique à gradient d'indice

Pour remédier à l'élargissement des impulsions, on a fabriqué des fibres dites à gradient d'indice dans lesquelles on a remplacé le cœur par un milieu inhomogène d'indice $n(y)$ vérifiant la relation

$$n^2(y) = n_c^2 \cdot \left[1 - 2 \cdot \Delta \cdot \left(\frac{y}{r_c} \right)^2 \right] \text{ pour } |y| \leq r_c, \text{ où } y \text{ désigne la distance algébrique du point considéré à l'axe } Ox \text{ et } r_c \text{ le rayon du cœur de la fibre. La gaine reste homogène d'indice } n_g \text{ et on a encore } n(y=0) = n_c = 1,500. \text{ Le rayon entre dans la fibre en } O \text{ avec un angle d'incidence } \theta \text{ compris entre } 0 \text{ et } \theta_L. \text{ Dans ces conditions, la trajectoire du rayon lumineux est celle indiquée en } \textbf{figure 7}.$$

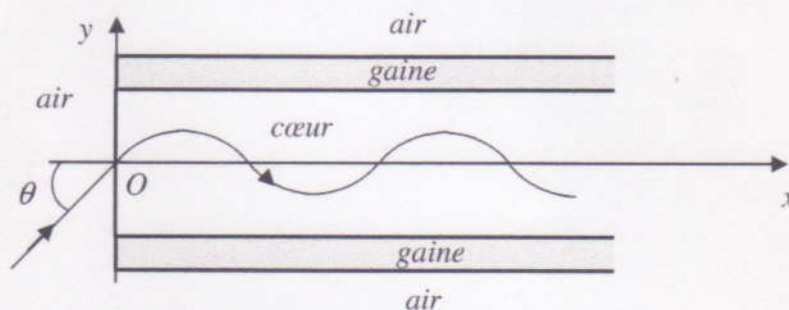


Figure 7 – Fibre à gradient d'indice

- Q24.** Reproduire la **figure 7**. Justifier puis dessiner, sans respect d'échelle, les vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}} n(y)$ au sein du cœur pour $y > 0$ et $y < 0$.
- Q25.** Soit un point M du rayon lumineux repéré par ses coordonnées $(x; y)$. On introduit φ , l'angle formé en M entre la tangente au rayon lumineux et l'axe Ox comme indiqué en **figure 8a** de la page 8. En considérant le cœur comme un milieu stratifié formé de milieux d'indices $n_0, n_1, \dots, n_j, \dots$ limités par des dioptries plans parallèles, d'équation $y = \text{cste}$ (**figure 8b** page 8), quelles relations lient les indices n_{j-1} , n_j , et n_{j+1} aux angles d'incidence i_{j-1} , i_j , i_{j+1} ? En considérant que cette propriété est valable pour une fibre à gradient d'indice, que peut-on dire de la quantité $n(y) \cdot \cos \varphi$? Exprimez-la en fonction de n_c et $\theta_0 = \text{Arcsin} \left(\frac{n_g \cdot \sin \theta}{n_c} \right)$.

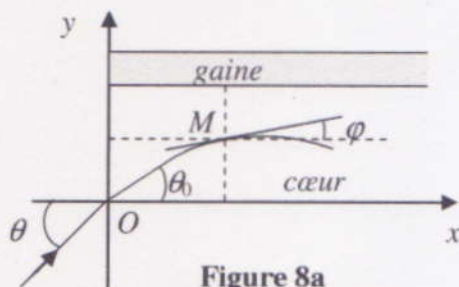


Figure 8a

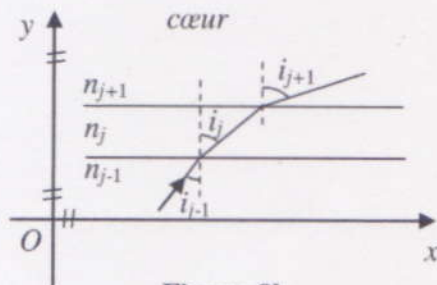


Figure 8b

Trajectoire du rayon lumineux dans une fibre à gradient d'indice

Relier, $\frac{dy}{dx}$, la pente de la tangente du rayon lumineux en M , à l'angle φ . Montrer alors que :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{n(y)}{n_c \cdot \cos \theta_0}\right)^2 - 1.$$

Q26. En considérant que $n^2(y) = n_c^2 \cdot \left[1 - 2 \cdot \Delta \cdot \left(\frac{y}{r_c}\right)^2\right]$ et en dérivant l'équation précédente, on

obtient l'équation différentielle suivante : $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2 \cdot \Delta}{(r_c \cdot \cos \theta_0)^2} \cdot y$. Donner l'équation de la

trajectoire d'un rayon, $y(x)$, en fonction de r_c , Δ , θ_0 et x . Montrer que le rayon lumineux coupe l'axe Ox en des points régulièrement espacés d'une distance d que l'on exprimera en fonction de r_c , Δ , θ_0 .

Q27. On appelle ouverture numérique, O.N., la quantité $\sin \theta_L$ où θ_L est l'angle limite défini à la question **Q17**. Existe-t-il une différence d'O.N. entre une fibre optique à saut d'indice et une à gradient d'indice ? Quel est l'intérêt de cette caractéristique de la fibre optique ?

Q28. On considère une impulsion lumineuse identique à celle de la question **Q21**. Cette impulsion, en sortie d'une fibre optique à gradient d'indice de longueur L , possède un élargissement temporel, $\delta T' = \frac{n_c \cdot L}{c} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \cos \theta_0} - 1 + \frac{\cos \theta_0}{2}\right)$. Evaluer cette durée pour $L = 10$ km et l'angle θ_0 maximum. Commenter. Interpréter physiquement pourquoi l'élargissement temporel est plus petit dans une fibre à gradient d'indice.

Q29. À quelle condition sur le rayon de la fibre le modèle utilisé jusqu'à présent est-il valable ?

Q48. Si la fibre peut être courbée sans grand inconvénient mécanique, cette courbure peut néanmoins conduire à une perte de l'énergie guidée. En raisonnant sur la **figure 14**, expliquer la raison de cette perte dans une fibre optique à saut d'indice. En considérant un rayon pénétrant dans la fibre, perpendiculairement à sa section, à la limite du bord inférieur, donner en fonction de n_c , n_g , r_c et r_g le rayon de la gaine, l'expression du rayon de courbure r à partir duquel la perte de courbure apparaîtra. Calculer ce rayon en considérant que $r_g + r_c = 1,0$ mm, $r_c - r_g \approx 0$, $n_c = 1,500$ et $n_g = 1,485$. Conclure.

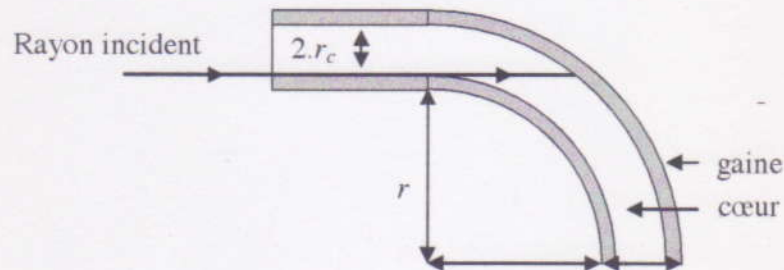
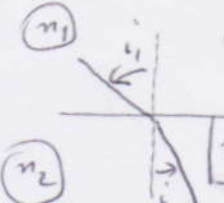
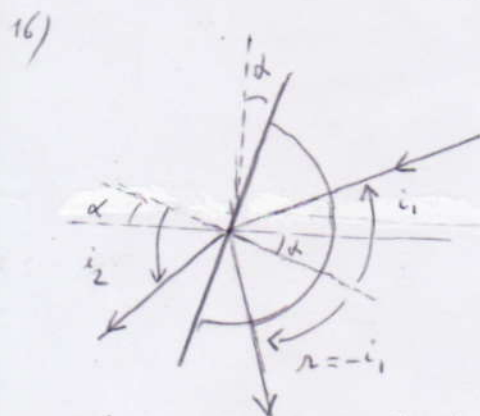


Figure 14 – Perte de courbure dans la fibre optique à saut d'indice

15) + 
Plans réfléchi et incident confondus


Plans réfracté et incident confondus.
 $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

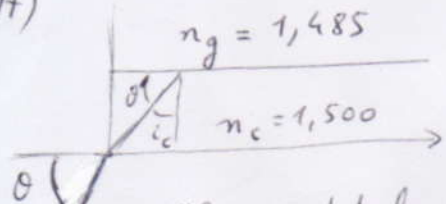


$$n \sin i_1 = \sin i_2$$

$$n > 1 \Rightarrow i_2 > i_1$$

En faisant tourner le disque, on peut vérifier les lois de Descartes.
On peut observer la réflexion totale lorsque i_2 atteint $\frac{\pi}{2}$ (avant que i_1 ne l'atteigne).

On utilise un laser pour un point précis fin pinceau lumineux, et une lumière monochromatique (pas de dispersion selon λ)

17) 
 $n_g = 1,485$
 $n_c = 1,500$
 $n_c \sin i_c = n_g \sin i_g$
 $n_c \cos \theta' \leq n_g$
La réflexion totale sur la gaine a lieu si $\cos \theta' \leq \frac{n_g}{n_c}$
 $\cos \theta'_L = \frac{n_g}{n_c}$

Pour l'angle θ : $n_a \sin \theta = n_c \sin \theta'$
d'où $n_a \sin \theta_L = n_c \sin \theta'_L = n_c \sqrt{1 - \cos^2 \theta'_L}$
soit $\sin \theta_L = \frac{n_c}{n_a} \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}$

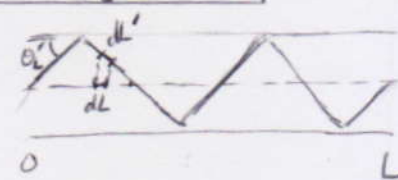
AN: $\sin \theta_L = \frac{1,500}{1,000} \sqrt{1 - \left(\frac{1,485}{1,500}\right)^2}$
donne $\theta_L = 12^\circ$

18) Certainement le rayon direct à $\theta = 0^\circ$ traverse le plus rapidement la fibre puisque'il suit le chemin le plus court.

19) A l'inverse le rayon qui parcourt le plus long chemin et donc met le plus

de temps est le rayon à θ_L . (1)

Durée $T_1 = \frac{L}{\frac{c}{n_c}} = \frac{n_c L}{c}$

Durée T_2 

Rq: $\forall$ le morceau découpé dans le zigzag on a $dL' = \frac{dL}{\cos \theta'_L}$

donc mis bout à bout: $L' = \frac{L}{\cos \theta'_L}$

où L' est la longueur en zigzag.

cf 17) $\cos \theta'_L = \frac{n_g}{n_c}$ donc $L' = \frac{L}{\frac{n_g}{n_c}} = \frac{n_c L}{n_g}$

d'où $T_2 = \frac{L'}{\frac{c}{n_c}} = \frac{n_c^2 L}{n_g c}$

20) $\delta T = T_2 - T_1 = \frac{n_c L}{c} \left(\frac{n_c}{n_g} - 1 \right)$

Si on veut éliminer n_g on voit que $2\Delta = 1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2$ conduit à

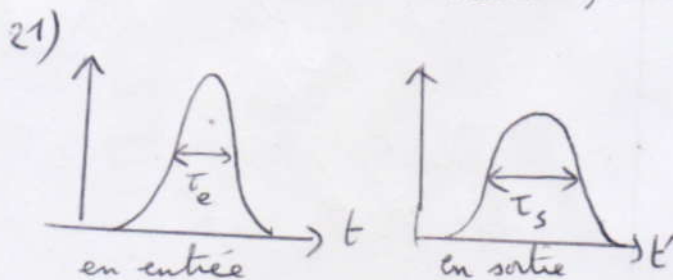
$$n_g = n_c (1 - 2\Delta)^{1/2} \approx n_c (1 - \Delta) \text{ car } \Delta \ll 1$$

d'où $\delta T = \frac{n_c L}{c} \left((1 - \Delta)^{-1} - 1 \right)$

$$\delta T \approx \frac{n_c L \Delta}{c}$$

AN $\delta T = \frac{1,500 \times 10 \times 10^3}{3 \times 10^8} \times \frac{1 - \left(\frac{1,485}{1,500}\right)^2}{2}$

$\delta T = 5 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ peu mais mesurable, étalable

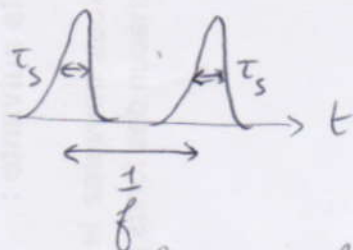


A chaque entrée à l'instant t correspond un intervalle de sortie $[t', t' + \delta T]$

Donc l'impulsion en sortie aura une allure identique élargie $\tau_s = \tau_e + \delta T$

on peut se douter que par conservation de l'énergie totale, le "pic" sera moins élevé à cause de cet élargissement.

22) Arrivée de 2 impulsions successives en sortie :



Critère approximatif choisi pour le non recouvrement :
 $\frac{1}{f} > \tau_s$ c'est-à-dire $\frac{1}{f} > \delta T$ si on néglige τ_e devant δT

Critère de non recouvrement $\boxed{f < f_{\max} = \frac{1}{\delta T}}$

23) Si on doit avoir $f < \frac{1}{\delta T}$

alors $f < \frac{c}{n_c L \Delta}$ d'après 20)

soit $L < \frac{c}{n_c f \Delta}$

A fréquence choisie f la longueur L de la fibre ne doit pas dépasser $\boxed{L_{\max} = \frac{c}{n_c f \Delta}}$

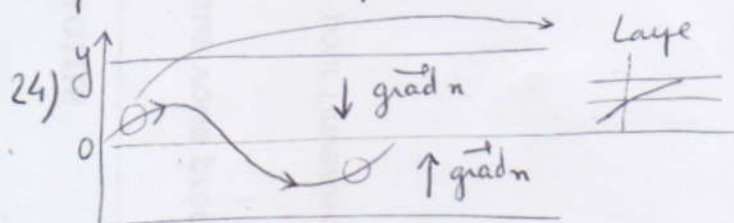
Alors $\boxed{B = L_{\max} f = \frac{c}{n_c \Delta}}$

B ne dépend que des caractéristiques de la fibre (indices cœur-gaine) et de la vitesse de la lumière c , mais est indépendante de la fréquence envoyée.

$100 \text{ bits/s} \Rightarrow f = 10^8 \text{ Hz}$

$L_{\max} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,500 \cdot 10^8 \times \frac{1}{2} (1 - (\frac{1,485}{1,500})^2)} = 200 \text{ m}$

ça paraît faible comme longueur pour espérer communiquer.



Pour $y > 0$ le rayon progresse en s'éloignant de la normale donc $n \searrow$ si $y \nearrow$
 c'est-à-dire $\frac{dn}{dy} < 0$ donc $\vec{\text{grad}} n$ opposé à $\vec{e}_y$
 Pour $y < 0$ c'est l'inverse : $n \nearrow$ si $y \nearrow$
 donc $\vec{\text{grad}} n$ a le sens de $\vec{e}_y$

25) Descartes (2)

$$n_{j-1} \sin i_{j-1} = n_j \sin i_j = n_{j+1} \sin i_{j+1}$$

on en déduit que $n \sin i = \text{Cste}$

or $\sin i = \cos \varphi$
 d'où $\boxed{n \cos \varphi = \text{Cste}}$

on évalue la constante avec la condition limite en $x = 0$ où le rayon arrive en 0 donc $\boxed{n(y=0) = n_c \left[1 - 2\Delta \left(\frac{0}{a} \right)^2 \right] = n_c}$

au θ Descartes $n_a \sin \theta = n_c \sin \varphi(0)$
 $= n_c \sqrt{1 - \cos^2 \varphi(0)}$

Donc $\text{Cste} = n_c \left(1 - \frac{n_a^2 \sin^2 \theta}{n_c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = n_c (1 - \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}$

$\text{Cste} = n_c \cos \theta_0$

Ainsi, en résumé, $\boxed{n \cos \varphi = n_c \cos \theta_0}$

$\boxed{\frac{dy}{dx} = \tan \varphi}$

or $1 + \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1$

soit $\boxed{\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \left(\frac{n(y)}{n_c \cos \theta_0} \right)^2 - 1} \quad (\text{OK})$

26) Énoncé : $\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{2\Delta}{(n_c \cos \theta_0)^2} y$

On remarque une équation d'oscillateur du type $y'' + K^2 y = 0$ avec $K^2 = \frac{2\Delta}{(n_c \cos \theta_0)^2}$

Solution : $y = \alpha \cos Kx + \beta \sin Kx$

Conditions limites : $y(x=0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \left(\frac{n(y=0)}{n_c \cos \theta_0} \right)^2 - 1 = \left(\frac{n_c}{n_c \cos \theta_0} \right)^2 - 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta_0} - 1 = \tan^2 \theta_0$

soit $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \tan \theta_0 \quad (> 0)$

D'où $\tan \theta_0 = \beta K \rightarrow \beta = \frac{\tan \theta_0}{K}$

$\rightarrow y = \frac{\tan \theta_0}{K} \sin Kx$ avec $K = \frac{\sqrt{2\Delta}}{n_c \cos \theta_0}$

Il s'agit d'une sinuséide qui va couper l'axe Ox chaque fois que $\sin Kx = 0$ c'est tous les x tels que $Kx = m\pi$ m entier

$$d = \frac{\pi}{K} = \frac{\pi r_c \cos \theta_0}{\sqrt{2\Delta}}$$

27) La question est : est-ce que le rayon atteint la gaine ? s'il ne l'atteint pas P.O.N. n'est pas limitée et ce sera l'intérêt de cette nouvelle fibre

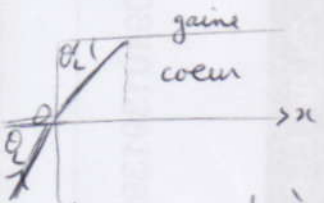
$$y_{\max} = \frac{\tan \theta_0}{\sqrt{2\Delta}} r_c \cos \theta_0 = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{2\Delta}} r_c = \frac{n_a \sin \theta}{n_c \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}}$$

Il faudrait que $y_{\max} \leq r_c$ donc $\frac{n_a \sin \theta}{n_c \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}} \leq 1$ soit après calcul $\sin \theta \leq \frac{1}{n_a} \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$

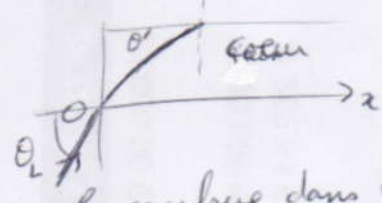
$$\sin \theta \leq \frac{n_c}{n_a} \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}$$

C'est la même condition qu'en 17) où la fibre était "nature".

Cependant on peut comparer par le $\sin \theta_c$:
Fibre "nature" Fibre à gradient d'indice



θ_c correspond à la réflexion totale cœur / gaine



Vue la courbure dans le cœur, $\theta' < \theta_c$ on est donc sûr de la réflexion totale.

Cette comparaison permet de se douter qu'en augmentant l'angle θ d'incidence entrée dans la fibre, on va encore avoir la réflexion totale cœur / gaine par le schéma de droite.

L'intérêt de la fibre à gradient d'indice est donc d'augmenter l'O.N.

28) AN $\delta T' = \frac{1,500 \times 10 \times 10^3}{3 \times 10^8} \left(\frac{1}{2 \cos \theta_0} - 1 + \frac{\cos \theta_0}{2} \right)$

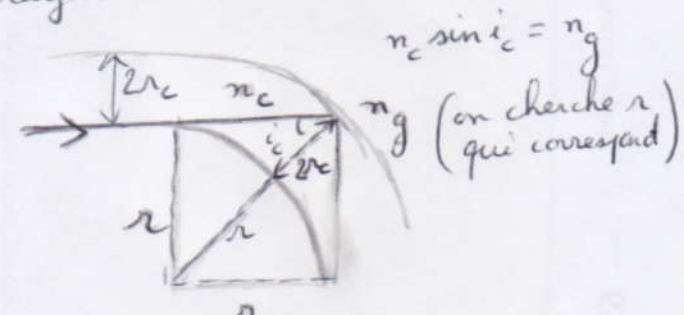
avec θ_0 max qui correspond à $\theta = \frac{\pi}{2}$ soit
 $\sin \theta_0 = \frac{n_a}{n_c} = \frac{1,000}{1,500} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos \theta_0 = 0,75$

$\Rightarrow \delta T' = 2,2 \mu s$ (légère, l'énorme tend à dire que $\delta T' < \delta T$ et je trouve numériquement $\delta T' > \delta T$)

Si on trouve $\delta T' < \delta T$ c'est ③ parce que le chemin en sinuséide est plus court que le chemin en grands zigzags.

29) Comme vu en 27) il faut que $r_c > y_{\max}$. On a déjà calculé ce que ça entraîne.

48) Il y a perte si la réflexion totale ne se fait plus. On observe que plus la fibre sera courbée, plus le rayon arrivant sur la gaine aura une incidence faible. On comprend alors qu'il pénétrera dans la gaine. Schéma limite de courbure où le rayon est totalement réfléchi :



$\sin i_c = \frac{r}{r + 2r_c}$ d'où $n_c \frac{r_{\min}}{r + 2r_c} = n_g$

soit $r_{\min} = \frac{2 n_g}{n_c - n_g} r_c$

AN $r_{\min} = \frac{2 \times 1,485}{1,500 - 1,485} \times 10^{-3}$

$r_{\min} = 10 \text{ cm}$

Cette valeur est raisonnable mais il ne faut pas forcer trop la courbure (passage par un angle de mur dans une maison).