I Modèle météorologique

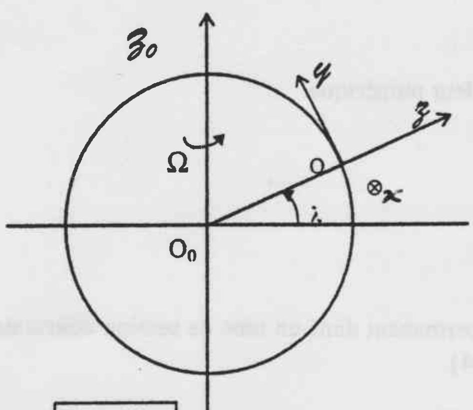


Figure N°1

Un point M situé dans l'atmosphère est repéré par ses coordonnées x,y,z dans le repère terrestre local $(O\,x,y,z)$ dont l'origine O se trouve dans un plan méridien à la latitude λ {figN°1} avec $0 \le \lambda \le \pi/2$ pour l'hémisphère nord,

l'axe Ox étant dirigé vers l'Est,

l'axe Oy étant dirigé vers le Nord,

l'axe Oz étant dirigé suivant la verticale ascendante.

On prendra $\Omega = \dfrac{2\pi}{86164}\, rad\ s^{-1}$

I-1 On s'intéresse à la résultante $d\vec{F}$ des forces de pression s'exerçant sur un élément de fluide atmosphérique de masse dm, de forme parallélèpipédique, de volume $dv = dxdydz$; montrer que la force de pression rapportée à l'unité de masse, définie par $\vec{f} = \dfrac{d\vec{F}}{dm}$ est donnée par l'expression

$$\vec{f} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\,P$$

où ρ est la masse volumique du fluide en M et P la pression en M{fig. N° 2}

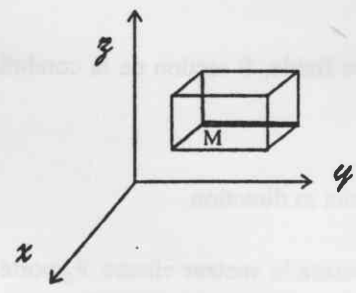
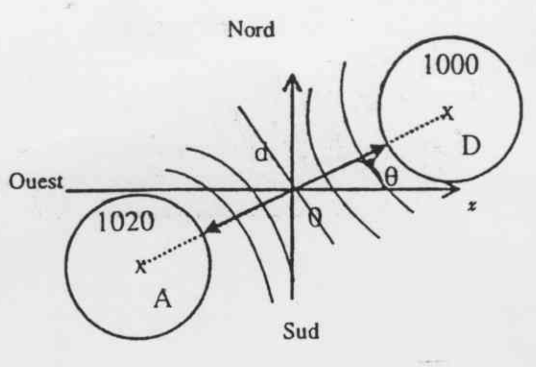


Figure N°2

Dans une atmosphère calme, par quoi est compensée la composante verticale des forces de pression ?

Par la suite, on supposera cette compensation effective en toutes circonstances et on ne s'intéressera qu'au mouvement de la particule de fluide dans un plan horizontal.

I-2 Soit la situation météorologique schématisée sur la figure dans laquelle l'axe anticyclone-dépression fait un angle θ avec la direction Ox.



La distance entre les isobares 1020 et 1000 est notée d, les pressions étant mesurées en hectopascals. On supposera le gradient de pression uniforme sur l'axe AD, sa norme étant notée a.

N.B. : Au niveau de l'axe AD les isobares sont perpendiculaires à cet axe et sont localement assimilables à des segments de droite.

Exprimer les composantes f_x et f_y, de la force massique de pression en fonction de $a, \rho\ et \theta$.

I-3 Le référentiel géocentrique étant supposé galiléen, on se place dans un référentiel terrestre. Quelles sont les forces qui agissent sur une particule de fluide. Qu'appelle t on poids de la particule?.
Ecrire le P.F.D. pour la particule de fluide dans le référentiel terrestre.

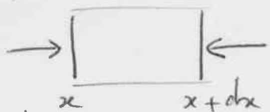
I-4 Projeter l'équation sur les axe Ox et Oy et montrer qu'en régime de « vitesse constante », le fluide atmosphérique s'écoule au niveau de l'axe AD suivant une direction et un sens que l'on précisera avec soin sur la figure Ox et Oy sont horizontaux, Ox vers l'Est, oz verticale ascendante
On ne s'intéresse qu'aux mouvements horizontaux.
Comment modifier ces conclusions dans l'hémisphère sud ?

I-5 Chercher la norme du vecteur vitesse du vent; calculer sa valeur numérique.

d=400km ; $\lambda = 42^0$ Nord ; $\rho = 1.3\ kgm^{-3}$

ESIN PC 99

1) Par exemple sur l'axe x on a 2 forces pressantes dont la somme donne $p(x)\,dy\,dz - p(x+dx)\,dy\,dz$



soit $dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$

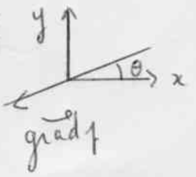
De m̂ $dF_y = -\frac{\partial p}{\partial y}\,dx\,dy\,dz$ } d'où $d\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p\;d\tau$

$dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$

Comme $\rho = \frac{dm}{d\tau}$ on a $d\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p\,\frac{dm}{\rho}$

soit $\boxed{\vec{f} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p}$

Dans une atmosphère calme, la composante verticale des forces pressantes est compensée par le poids.

2) 

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$ va vers les pressions croissantes

donc $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p = -a(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$

d'où $\vec{f} = \frac{a}{\rho}(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$ $\quad \boxed{f_x = \frac{a}{\rho}\cos\theta \quad f_y = \frac{a}{\rho}\sin\theta}$

3) La particule fluide est soumise à la force gravitationnelle, aux forces pressantes aux forces de viscosité (ici probablement négligée) et aux forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis dues à la rotation de la Terre autour d'elle-même.

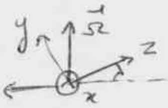
Le poids $dm\,\vec{g}$ englobe la force gravitationnelle et la force d'inertie d'entraînement.

PFD ds R_{terre} : $\boxed{dm\,\vec{a} = dm\,\vec{g} + dm\,\vec{f} - 2dm\,\vec{\Omega}\wedge\vec{v}}$

soit $\boxed{dm\,\vec{a} = dm\,\vec{g} - \frac{dm}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p - 2dm\,\vec{\Omega}\wedge\vec{v}}$

4) <u>Projection Ox</u> <u>en régime de vitesse constante</u>

$\boxed{0 = +\frac{dm}{\rho}a\cos\theta + 2\,dm\,\Omega\sin\lambda\,\dot{y}}$ $\quad \vec{g}\,/\!/\,\vec{z}$

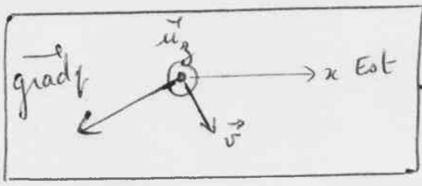


<u>Projection Oy</u> <u>en régime de vitesse constante</u>

$\boxed{0 = \frac{dm}{\rho}a\sin\theta - 2\,dm\,\Omega\sin\lambda\,\dot{x}}$

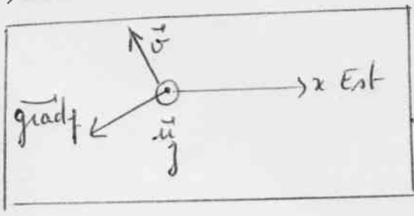
$\vec{v}\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{a}{2\rho\Omega\sin\lambda}\sin\theta \\ \dot{y} = -\dfrac{a}{2\rho\Omega\sin\lambda}\cos\theta \end{cases}$

or $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p \begin{vmatrix} -a\cos\theta \\ -a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$ donc $\boxed{\vec{v} = \frac{1}{2\rho\Omega\sin\lambda}\vec{u}_z\wedge\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p}$



<u>dans l'hémisphère Nord</u>

Dans l'hémisphère Sud $\lambda < 0$: les résultats sont inversés



<u>dans l'hémisphère Sud</u>

5) $\boxed{v = \frac{a}{2\rho\Omega|\sin\lambda|}}$

AN : $v = \frac{20\times 100}{400.10^3}\cdot\frac{1}{2\times 1{,}3\cdot\frac{2\pi}{24\times 3600}\sin 42°}$

<u>$v = 40\ \mathrm{m.s^{-1}}$</u>