

II Étude de l'émission et de l'absorption entre les deux niveaux hyperfins

L'analyse du rayonnement HI joue un rôle majeur en radioastronomie. Le milieu interstellaire est essentiellement gazeux (99% de sa masse prend la forme de gaz) et, parmi ces gaz, 89% des atomes sont de l'hydrogène. Le rayonnement HI est donc un moyen privilégié pour étudier le milieu interstellaire. En outre, le rayonnement HI à $\lambda = 21$ cm est très peu diffusé par les poussières interstellaires constituées de petits grains (silicates, graphite, glace) de quelques micromètres à quelques millimètres de diamètre, à la différence de rayonnements de plus courte longueur d'onde. La raie HI permet donc de « voir » les régions denses des galaxies.

Nous supposons par la suite que ce rayonnement est émis de façon isotrope et que les seuls processus envisagés sont les processus d'absorption et d'émission.

Les niveaux l et u de l'hydrogène dans son état électronique fondamental peuvent être « alimentés » par les collisions entre les atomes mais également par le rayonnement (absorption ou émission de photons). Lorsque les mécanismes de collision entre les atomes déterminent totalement les populations de ces niveaux, on dit d'un tel système qu'il est à l'équilibre thermique local à la température T et la répartition des populations dans les différents niveaux est alors régie par la relation de Boltzmann

$$\frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{E_u - E_l}{kT}\right)$$

où k est la constante de Boltzmann, n_l et n_u sont les densités particulières (nombre d'atomes par unité de volume) dans les deux niveaux d'énergie E_l et $E_u = E_l + \Delta E$. g_u et g_l sont les dégénérescences des niveaux u et l . La dégénérescence d'un niveau x d'énergie E_x est le nombre d'états différents du système ayant l'énergie E_x . Un niveau d'énergie E_x est dit non dégénéré ($g_x = 1$) s'il n'y a qu'un seul état du système possédant l'énergie E_x . Pour les niveaux hyperfins de l'atome d'hydrogène étudiés précédemment, on a $g_u = 3$ et $g_l = 1$.

II.A – Bilan radiatif de la raie HI

On note A_{ul} , B_{ul} et B_{lu} les coefficients d'Einstein correspondant respectivement à l'émission spontanée, à l'émission stimulée et à l'absorption entre les niveaux u et l . On donne $A_{ul} = 2,85 \times 10^{-15} \text{ s}^{-1}$.

Q 20. Rappeler sommairement les différentes caractéristiques de ces trois processus.

Q 21. Quelle est la durée de vie τ de l'état excité d'énergie E_u ?

Q 22. Dans le milieu interstellaire ce rayonnement conduit à une raie de forte intensité. Pourquoi ?

Dans la suite, on considère qu'on étudie un nuage froid d'hydrogène à la température $T = 100$ K et de densité particulière $n_H = 25 \text{ cm}^{-3}$.

Q 23. Montrer que l'essentiel de l'hydrogène du milieu interstellaire se trouve dans les deux niveaux hyperfins et que la densité particulière en atomes d'hydrogène n_H est telle que $n_H = n_u + n_l = 4n_l$.

Q 24. Exprimer $\frac{dn_l}{dt}$ en fonction des coefficients d'Einstein, de la densité spectrale u_ν du rayonnement électromagnétique et des densités particulières n_u et n_l .

On rappelle que la densité spectrale est la densité volumique d'énergie d'un rayonnement électromagnétique dont la fréquence se situe dans l'intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$ (unité : $\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Hz}^{-1}$).

Q 25. En supposant la largeur de la raie HI nulle, relier $\frac{dn_l}{dt}$ à $\frac{dn}{dt}$ où n est la densité particulaire des photons associés à cette transition.

En réalité la largeur de la raie n'est pas nulle, sa largeur est caractérisée par une fonction $\Phi(\nu)$. Cette fonction est centrée sur la fréquence ν_0 et elle vérifie la condition de normalisation $\int_0^\infty \Phi(\nu) d\nu = 1$. Dans chaque intervalle de fréquence $[\nu, \nu + d\nu]$ les probabilités de transition sont alors pondérées par $\Phi(\nu)$. On note n_ν la densité particulaire des photons dont la fréquence est comprise dans l'intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$ (unité : $\text{m}^{-3} \cdot \text{Hz}^{-1}$).

Q 26. Montrer que

$$\frac{dn_\nu}{dt} = A_{ul}n_u\Phi(\nu) + B_{ul}n_u\Phi(\nu)u_\nu - B_{lu}n_l\Phi(\nu)u_\nu$$

Un corps noir est un corps qui absorbe tous les rayonnements électromagnétiques qu'il reçoit, sans les réfléchir ni les transmettre. Maintenu à une température T constante il émet un rayonnement isotrope dont la densité spectrale d'énergie u_ν est régie par la relation de Planck

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

où ν est la fréquence du rayonnement. Le rayonnement émis est alors en équilibre thermique avec les atomes.

Q 27. Que vaut $\frac{dn_\nu}{dt}$ à l'équilibre thermique ? En déduire une expression de u_ν en fonction des coefficients d'Einstein et des densités particulaires n_u et n_l .

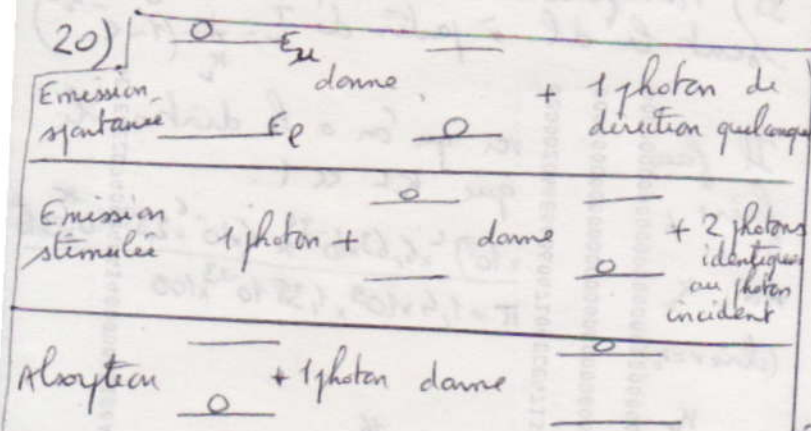
Q 28. Montrer que les coefficients d'Einstein vérifient les relations

$$g_u B_{ul} = g_l B_{lu} \quad \text{et} \quad B_{ul} = \frac{c^3}{8\pi h\nu_0^3} A_{ul}$$

Données numériques

Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante de Planck réduite	$\hbar = 1,054 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1836 m_e$
Facteur de Landé de l'électron	$g_S = 2,00$
Facteur de Landé du proton	$g_p = 5,58$
Magnéton de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ J}\cdot\text{T}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante de gravitation	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
Parsec	$1 \text{ pc} = 3,09 \times 10^{16} \text{ m}$
Masse du Soleil	$M_\odot = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$

• • • FIN • • •



A chaque processus le photon a l'énergie $E_u - E_l$

21) Emission spontanée : $dN_2 = -A_{ul} N_2 dt$
 d'où $N_2 = N_{20} e^{-A_{ul} t}$

La durée de vie de ce processus $\tau = \frac{1}{A_{ul}}$
 AN: $\tau = \frac{10^{15}}{2,85} = \frac{10^{15}}{2,85 \times 365 \times 24 \times 3600} \approx 11 \text{ millions d'années!}$

22) Intérêt important car grande quantité de gaz hydrogène atomique (89%)

23) Énoncé $\frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{E_u - E_l}{kT}\right)$

Rayonnement $\lambda_0 = 21 \text{ cm}$ correspond à
 $E_u - E_l = \frac{hc}{\lambda_0}$

donc $\frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{hc}{kT\lambda_0}\right)$

Calcul : $\exp\left(-\frac{hc}{kT\lambda_0}\right) = \exp\left(-\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{1,38 \cdot 10^{-23} \times 100 \times 0,21}\right) \ll 1$

≈ 1

d'où $\frac{n_u}{n_l} \approx \frac{g_u}{g_l} = \frac{3}{1}$ donc $n_u \approx 3 n_l$

d'où $n_H = n_u + n_l = 4 n_l$ (OK)

4) $\frac{dn_l}{dt} = - \underbrace{n_l u_l B_{lu}}_{\text{absorption}} + \underbrace{A_{ul} n_u}_{\text{émission spontanée}} + \underbrace{n_u u_l B_{ul}}_{\text{émission stimulée}}$

25) $\frac{dn_l}{dt} = \frac{dn}{dt}$

26) Il suffit de reprendre 24) en multipliant par la proportion de transition de l'intervalle $[v, v+dv]$:

$\frac{dn_v}{dt} = - n_l u_v B_{lu} \phi(v) + A_{ul} n_u \phi(v) + B_{ul} n_u u_v \phi(v)$
 (OK)

27) A l'équilibre : $\frac{dn_v}{dt} = 0$

$\rightarrow - n_l u_v B_{lu} + A_{ul} n_u + n_u u_v B_{ul} = 0$

$\rightarrow u_v = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}}$

28) On identifie u_v de 27) à celui de l'énergie pour la transition v_0 :

$\frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}} = \frac{8\pi h \nu_0^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_0}{kT}} - 1}$

On essaie de mettre le terme de gauche sous la forme $\frac{c}{D-1}$ pour pouvoir identifier ensuite ; pour cela divisons numérateur et dénominateur par $n_u B_{ul}$:

$\frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{8\pi h \nu_0^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_0}{kT}} - 1}$

ainsi $\frac{n_l B_{lu}}{n_u B_{ul}} = e^{\frac{h\nu_0}{kT}} \approx 1$ (cf calcul en 23))

$\frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{8\pi h \nu_0^3}{c^3}$

Or en 23) on a écrit $\frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l}$ d'où

finalement $\frac{g_l B_{lu}}{g_u B_{ul}} = 1$ soit $g_u B_{ul} = g_l B_{lu}$ (OK)

puis $B_{ul} = \frac{c^3}{8\pi h \nu_0^3} A_{ul}$ (OK)