Mesure optique : méthodes interférentielles.

On assimile une couche déposée à une lame à faces parallèles L, définie par une épaisseur uniforme e et un indice de réfraction constant n. La lumière est émise par une source S, et un faisceau parallèle est obtenu au moyen de la lentille L_1. La lame L est perpendiculaire à la direction de propagation de la lumière (incidence normale). La lentille L_2 concentre le faisceau réfléchi sur le détecteur D. On observe des phénomènes d'interférences entre les faisceaux réfléchis par les faces avant et arrière de la lame. **On admettra dans la suite que les amplitudes de ces faisceaux sont les mêmes, et on ne tiendra pas compte d'éventuels changements de phase à la réflexion.**

Pour séparer le faisceau réfléchi, on place un miroir plan semi-réfléchissant M sur le faisceau incident (figure 2). On admettra que M a une épaisseur négligeable, et un taux de réflexion indépendant de la longueur d'onde.

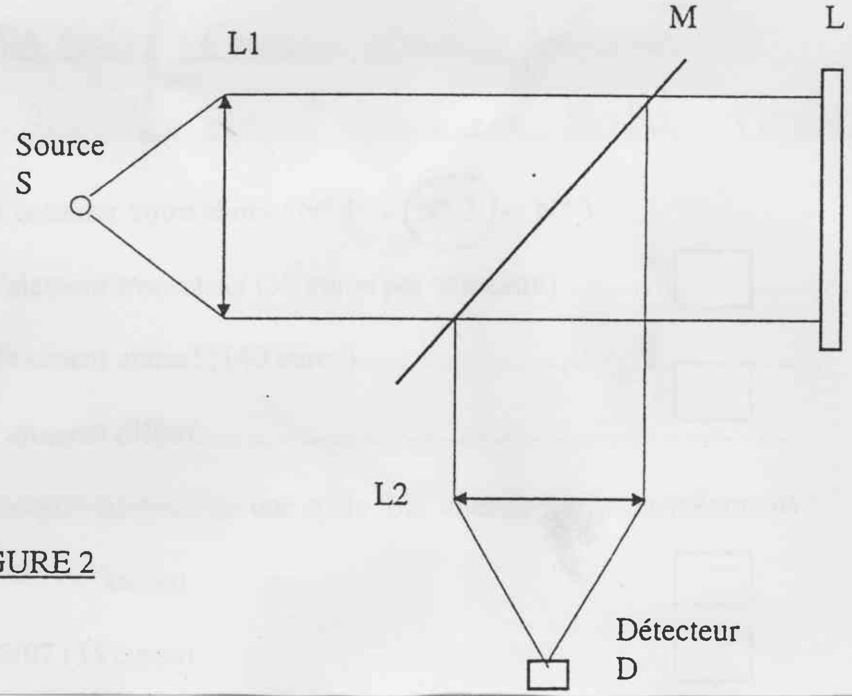


FIGURE 2

1. Représenter un montage avec un interféromètre de MICHELSON, réglé de manière à observer les franges d'égale épaisseur.

2.a. Le faisceau incident est monochromatique ; la longueur d'onde émise par la source S est λ. Déterminer l'intensité de la lumière I mesurée par le détecteur. On écrira I sous la forme d'un produit d'une constante $I_0 = I(e=0)$, non explicitée, et d'une fonction I(e) dépendant de e : $I = I_0 . I(e)$.

2.b. Montrer que I(e) permet de suivre la croissance de l'épaisseur de la couche déposée ; justifier que ce n'est possible que si l'on part d'une épaisseur nulle, ou très faible.

2.c. En admettant une précision de $\Delta I / I_0$ sur I, quelle sera l'incertitude Δe obtenue pour les très petites valeurs de e ($e << \lambda$).

2.d. Application numérique : quelle est la précision sur e obtenue pour : $\lambda = 0{,}56\ \mu m$, $n = 2$, $e = 0{,}02\ \mu m$, $\Delta I / I_0 = 10^{-2}$?

3. **Le faisceau n'est plus monochromatique ; dans les questions suivantes, la source S émet un spectre de lumière blanche.** On admettra, dans cette question, que le détecteur peut mesurer I en fonction de λ, grâce à l'adjonction, en amont, d'un monochromateur agissant comme un filtre.

3.a. Donner l'expression des valeurs de λ pour lesquelles, l'intensité $I = I_0 \cdot I(e, \lambda) = 0$.

3.b. Application numérique :
quelles sont, dans le domaine du visible ($0{,}40\ \mu m < \lambda < 0{,}75\ \mu m$), les longueurs d'onde correspondant à $I = 0$, pour $e = 1{,}25\ \mu m$ et $n = 1{,}6$?

3.c. Expliquer que l'analyse de I en fonction de λ, à la fin de l'opération de dépôt, permet de déterminer e sans ambiguïté .

3.d. Application numérique :
$I = 0$ pour les valeurs successives de la longueur d'onde :
$\lambda = 0{,}6857\ \mu m$, $\lambda = 0{,}5333\ \mu m$, $\lambda = 0{,}4363\ \mu m$.
En déduire une valeur de e, connaissant n ($n = 1{,}6$).

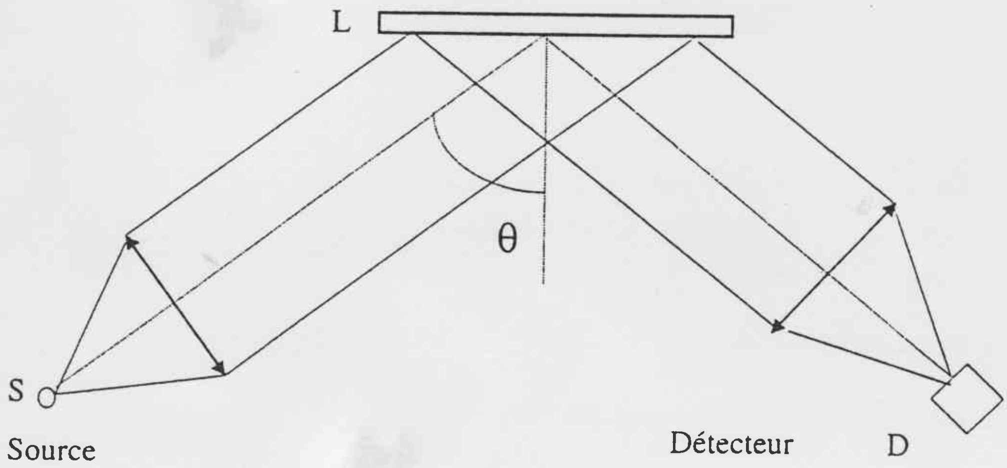


FIGURE 3

4. Le montage optique proposé précédemment (figure 2) ne permettra pas, en pratique, l'observation des interférences pendant le dépôt en raison de la présence du miroir M qui va intercepter une grande partie des molécules. On modifie donc le montage, de manière à pouvoir placer la source, les lentilles et le détecteur à l'extérieur de l'enceinte (figure 3).

4.a. Calculer la différence de marche entre deux rayons réfléchis r_1 et r_2 issus d' un même rayon incident r_i . Calculer I, qui est maintenant une fonction de e, λ et θ .
On posera : $I = I_0 \cdot I(e, \lambda, \theta)$.
Pour $\theta = 0$, on doit retrouver la même expression qu'en **2.a.**
Exprimer la différence de marche pour θ tendant vers $\pi / 2$ (incidence rasante) ; montrer qu'elle n'est pas nulle pour $n > 1$.

4.b. On admet que S émet une lumière monochromatique, de longueur d'onde λ . En admettant à nouveau une incertitude ΔI sur I, quelle sera la précision sur e, pour les très petites valeurs de e ($e << \lambda$).
Comparer aux expressions obtenues à la question **2.c.**

5. Dans tous les cas, on utilise un faisceau incident parallèle. Pourquoi ?

6. Le montage de la figure 3 est modifié de manière à obtenir l'image d'une partie de la lame sur la fente d'entrée d'un spectrographe (figure 4). Avec une fente très étroite, on pourra examiner une bande très étroite (de même largeur que la fente, pour un grandissement unité et pour $\theta = 0$). Si e est constant (lame à faces parallèles) on observera des cannelures rectilignes sur la plaque photographique. On peut utiliser ce montage pour mettre en évidence une variation de e : la valeur des λ correspondant à $I = 0$ dépendra de l'épaisseur à l'endroit examiné.

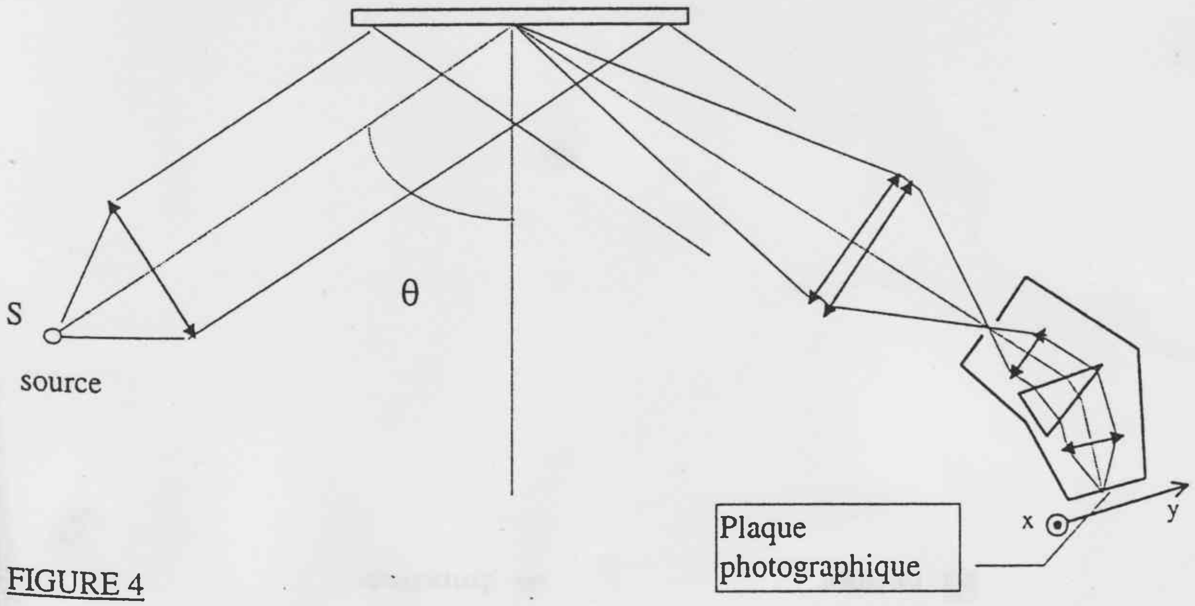


FIGURE 4

On considère une lame en forme de ménisque de rayon R, son épaisseur est nulle au bord, maximale et égale à e au centre ($e << R$), sa valeur est donnée par :

$$e(r) = e\,(1 - (r/R)^2),$$ où r est la distance au centre (voir figure 5).

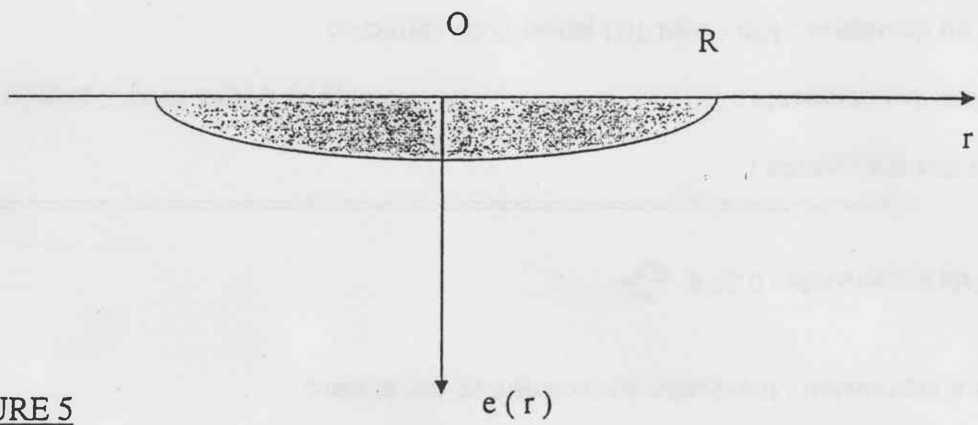


FIGURE 5

On examine la bande correspondant au diamètre parallèle à la fente d'entrée du spectrographe. On introduira, un grandissement transversal G entre la tranche examinée et son image sur la fente et un grandissement transversal G' entre l'entrée et la sortie du spectrographe.

6.a. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $I = 0$.

6.b. Sur la plaque photographique, les points pour lesquels $I = 0$ sont caractérisés par leurs coordonnées (x , y), x correspond à la position de l'image du point sondé sur la couche mince et y correspond à la longueur d'onde. On admettra que la dispersion sur la plaque photographique ($dy/d\lambda$) est constante sur l'ensemble du spectre visible, on la représentera par D. Exprimer y en fonction de D, λ et un origine arbitraire notée y_0.

6.c. Déterminer enfin les fonctions y (x , p) pour lesquelles on a $I = 0$; ici, p est un nombre entier correspondant à l'ordre d'interférence. Ne pas oublier d'introduire les grandissements G et G' dans le calcul. On précisera la forme des courbes obtenues (cannelures « sombres » ou lieu des points pour lesquels $I = 0$).

6.d. Application numérique :

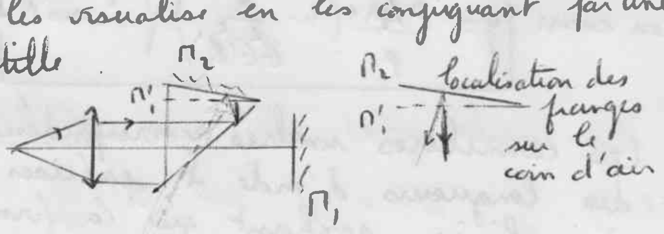
On posera $y = 0$ pour $\lambda = 0{,}40\ \mu m$; avec la dispersion $D = dy/d\lambda = 2.10^5$, déterminer la valeur de l'origine arbitraire y_0. Quelle est la longueur minimale (dans la direction y) que doit avoir la plaque photographique pour permettre l'analyse de la totalité du spectre visible ($0{,}40\ \mu m < \lambda < 0{,}75\ \mu m$) ?

6.e. On donne encore : $R = 1$ cm, $e = 1{,}25\ \mu m$, $n = 1{,}6$, $\theta = 60°$ ($\pi / 3$), $G = 0{,}5$ et $G' = 1$; donner enfin l'équation d'une cannelure d'ordre p soit $y\ (x, p)$ avec des coefficients numériques.

Pour représenter schématiquement ces cannelures, calculer successivement :

- les valeurs de λ (donc y) pour $x = 0$, CCP PSI 98

1) Les franges d'égale épaisseur sont obtenues avec le Michelson <u>en coin d'air</u> éclairé sous incidence quasi normale. Les franges sont localisées sur les miroirs (ou le coin d'air) dans le cas d'une source étendue. On les visualise en les conjuguant par une lentille



2.a) Soit δ la différence de marche des 2 rayons dans le coin d'air, ici la couche d'épaisseur e d'indice n :

$\delta = 2ne \qquad I = K(1+\cos\varphi)$

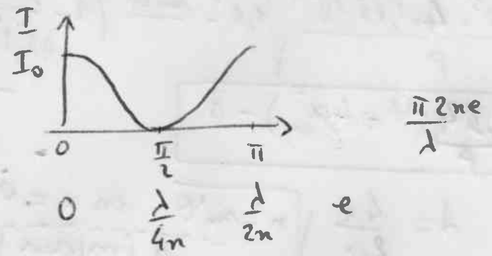
où $\varphi = \dfrac{2\pi\delta}{\lambda}$

L'énoncé propose I_0 pour $e=0$ càd $\varphi = 0$

donc $I_0 = K \times 2$

d'où $\boxed{I = \dfrac{I_0}{2}\left(1+\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}2ne\right)\right) = I_0\cos^2\left(\dfrac{\pi\, 2ne}{\lambda}\right)}$

2b) Si on part de $e=0$ alors on part de $I = I_0$



On voit donc que $I \searrow$ si $e \nearrow$ jusqu'à $\dfrac{\lambda}{4n}$

puis $I \nearrow$ si $e \nearrow$ jusqu'à $\dfrac{\lambda}{2n}$ etc

Pour suivre l'évolution quantitative de e il faut une référence fiable et donc ne pas partir d'une couche déjà déposée qui serait supérieure à $\dfrac{\lambda}{2n}$ puisqu'à partir de cette épaisseur on a la même variation de I qu'à partir de $e = 0$.

2c) Différentier I/e : $dI = -I_0 \dfrac{\pi 2n}{\lambda}\sin\dfrac{4\pi ne}{\lambda}\, de$

d'où $\dfrac{dI}{I_0} = -\dfrac{2\pi n}{\lambda}\sin\dfrac{4\pi ne}{\lambda}\, de$

Si $e \ll \lambda$ alors $\sin\dfrac{4\pi ne}{\lambda} \simeq \dfrac{4\pi ne}{\lambda}$

et $\boxed{\Delta e = \dfrac{\Delta I}{2I_0 e}\left(\dfrac{\lambda}{2\pi n}\right)^2}$

2d) AN : $\dfrac{\Delta e}{e} = \dfrac{10^{-2}}{2\times(0{,}02\cdot 10^{-6})^2}\left(\dfrac{0{,}56\cdot 10^{-6}}{2\pi\cdot 2}\right)^2$ ①

$\boxed{\text{Précision } \dfrac{\Delta e}{e} = 2{,}5\ \%}$

3a) On souhaite $I = 0$ soit $\dfrac{2\pi ne}{\lambda} = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

d'où $\boxed{\lambda = \dfrac{4ne}{2k+1} \quad k \text{ entier avec } 0{,}4 < \lambda < 0{,}75\ \mu m}$

3b) AN $\lambda = \dfrac{4\times 1{,}6 \cdot 1{,}25}{2k+1}$ en μm

k	5	6	7	8	9
$\lambda_{\mu m}$	0,73	0,62	0,53	0,47	0,42

3c) On connaît n, on mesure les λ éteintes on ne connaît pas k ni e.

Mais la relation 3a) dit que $\dfrac{4ne}{\lambda} = 2k+1$

càd $\dfrac{4ne}{\lambda}$ varie de 2 unités entre 2 λ successifs d'extinction.

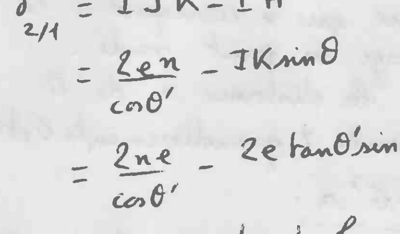
$\boxed{4ne\left(\dfrac{1}{\lambda_2} - \dfrac{1}{\lambda_1}\right) = 2}$

3d) $(n=1{,}6)$ $\lambda_1 = 0{,}6857\ \mu m$, $\lambda_2 = 0{,}5333\ \mu m$ $\Rightarrow e = 0{,}75\ \mu m$

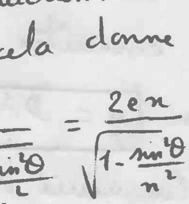
$\lambda_1 = 0{,}5333\ \mu m$, $\lambda_2 = 0{,}4363\ \mu m$ $\Rightarrow e = 0{,}75\ \mu m$

On retient $\boxed{e = 0{,}75\ \mu m}$

4a)



Le rayon incident se partage en IJK pour 2 et IH pour 1. Ils parcourent ensuite le même chemin optique jusqu'au détecteur D



$\delta_{2/1} = IJK - IH$

$= \dfrac{2en}{\cos\theta'} - IK\sin\theta$

$= \dfrac{2ne}{\cos\theta'} - 2e\tan\theta'\sin\theta$

Loi de Descartes de la réfraction : $\sin\theta = n\sin\theta'$

Avec $\cos\theta' = \sqrt{1-\sin^2\theta'}$ cela donne :

$$\delta_{2/1} = \frac{2ne}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{n^2}}} - 2e\frac{\sin^2\theta}{n\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{n^2}}} = \frac{2en}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{n^2}}}\left(1-\frac{\sin^2\theta}{n^2}\right)$$

$$\boxed{\delta_{2/1} = 2ne\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{n^2}}}$$

On a la même formule d'interférences à 2 ondes d'amplitude identique qu'en 2a)

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = I_0 \cos^2 \frac{\pi \delta}{\lambda}$$

$$\boxed{I = I_0 \cos^2 \frac{\pi 2ne}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}}}$$

Pour $\theta = 0$ on retrouve $I = I_0 \cos^2 \frac{\pi 2ne}{\lambda}$

Pour $\theta \to \frac{\pi}{2}$ $\quad \delta_{2/1} = 2ne \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$

$$\boxed{\theta \to \frac{\pi}{2} \quad \delta_{2/1} = 2e\sqrt{n^2 - 1}} \quad \text{si } n > 1 \;\; \delta \neq 0$$

4 b) θ est fixé. Le calcul est identique à 2c) en remplaçant $2ne$ par $2ne\sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}}$

donc $\Delta e = \dfrac{\Delta I}{2 I_0 e} \left(\dfrac{\lambda}{2\pi n \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}}} \right)^2$

soit une précision $\boxed{\dfrac{\Delta e}{e} = \dfrac{\Delta I}{2 I_0 e^2} \left(\dfrac{\lambda}{2\pi n} \right)^2 \dfrac{1}{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}}}$

La comparaison avec 2 c) est le facteur

$\dfrac{1}{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}}$ obligatoirement > 1

La précision est moins bonne

5) Le faisceau parallèle permet de focaliser en un point précis, là où est placé le détecteur qui recevra ainsi le maximum de lumière.

6) a) $I = 0$ pour $\dfrac{\pi}{\lambda} 2ne(r) \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}} = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

soit $\boxed{\lambda = \dfrac{4ne(r)}{2k+1} \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}}}$

6) b) L'énoncé indique que x correspond à la position de l'image du point sondé. Celui-ci est à la distance r de O et l'image a subi 2 grandissements G et G'

donc $\boxed{x = GG'r}$

Pour connaître y on lit que $\dfrac{dy}{d\lambda} = cte = D$

donc $\boxed{y = D\lambda + y_0}$

6) c) Les longueurs d'onde éteintes correspondent à :

$$y = \frac{D\, 4ne(r)}{2k+1} \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}} \quad \text{avec } e(r) = e\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = e\left(1 - \frac{x^2}{G^2 G'^2 R^2}\right)$$

d'où $y = \dfrac{D\, 4ne}{p} \left(1 - \dfrac{x^2}{G^2 G'^2 R^2}\right) \sqrt{1 - \dfrac{\sin^2\theta}{n^2}} + y_0$

ou encore $\boxed{y = \dfrac{D\, 4e}{p} \left(1 - \dfrac{x^2}{G^2 G'^2 R^2}\right) \sqrt{n^2 - \sin^2\theta} + y_0}$

La courbe $y(x)$ est une parabole.

6.d) $y = D\lambda + y_0$ avec $\begin{cases} D \hat{=} \dfrac{dy}{d\lambda} = 2.10^5 \\ y = 0 \text{ pour } \lambda = 0{,}4 \end{cases}$

Cela donne $y_0 = -D\lambda = -2.10^5 \times 0{,}4.10^{-6}$

soit $y_0 = -0{,}08$ m

Pour $\lambda = 0{,}75$ µm on a $y = D\lambda + y_0$

$= 2.10^5 \times 0{,}75.10^{-6} - 0{,}08$

$y = 0{,}07$ m

Résumé : $y = 0$ pour $\lambda = 0{,}4$ µm

$y = 0{,}07$ m pour $\lambda = 0{,}75$ µm

La plaque doit avoir une longueur minimale de 7 cm

6.e) $y = \dfrac{2.10^5 \times 4 \times 1{,}25.10^{-6}}{p} \sqrt{1{,}6^2 - \sin^2 60} \left(1 - \dfrac{x^2}{0{,}5^2 \cdot 1^2 \cdot 10^{-4}}\right) - 0{,}08$

soit $\boxed{y_{cm} = \dfrac{134{,}5}{p}(1 - 4x_{cm}^2) - 8}$

6.f) cf 6.a) $\lambda = \dfrac{4e}{p}\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}$ en $x = 0$, p impair

$\lambda = \dfrac{4 \times 1{,}25}{p}\sqrt{1{,}6^2 - \sin^2 60} = \dfrac{6{,}73}{p}$ µm

$p = 9 \to \lambda = \dfrac{6{,}73}{9} = 0{,}75$ µm

$\to y = \dfrac{134{,}5}{9}(1 - 4 \times 0) - 8 = 6{,}95$ cm

p	9	11	13	15
$\lambda_{\mu m}$	0,75	0,61	0,52	0,45
y_{cm}	6,9	4,2	2,3	0,97