Ex 1 La Terre T décrit une ellipse autour du Soleil en une période T_0 avec les paramètres suivants :
$a = 149{,}6.10^6 km,\quad T_0 = 1an$ G=6,67.10^{-11} SI

a) Soient v_P et v_A les vitesses de T au périgée P et à l'apogée A; on donne r_A / r_p=1,033 calculer v_P / v_A.,
ainsi que r_A et r_p .
b) Donner un ordrede grandeur de la masse du Soleil M_{Soleil}. ; la déterminer par un calcul.
c) Exprimer v en fonction de r.
d) Déduire v_P et v_A en fonction de r et de T_0 (en éliminant M_{Soleil}). Les calculer.

Ex 2 Un satellite de masse m inititalement sur orbite circulaire de rayon r_0 autour du centre T de la Terre de masse M_T (m << M_T) subit une déviation de trajectoire d'angle α entre l'ancien et le nouveau support de vitesse. (On choisira la nouvelle vitesse vers l'<u>extérieur</u> du cercle.

1) Exprimer la vitesse V_{avant} du satellite ainsi que son énergie mécanique $E_{m\ avant}$, avant la déviation commise.
2) Exprimer l'énergie mécanique $E_{m\ après}$ une fois la déviation commise. En déduire la nature de la nouvelle trajectoire.
3) Déterminer le demi-grand axe a , la distance à l'apogée r_A , la distance au périgée r_P , en fonction de r_0 et α .

Ex 3 Un noyau d'hélium ou particule α , de masse m_1 et de charge q_1 = 2e, subit la force de répulsion électrostatique d'un noyau d'or de masse m_2 >> m_1 et de charge q_2 = Ze centrée au point O. La distance entre le support de la vitesse initiale $\vec{v}_0$ (loin du point O) et la droite passant par O et parallèle à $\vec{v}_0$ est appelée *paramètre d'impact* et notée b . Exprimer la distance minimale d'approche r_m = OI en fonction de Z, e, m_1 , v_0 et b.

Ex 4 Un satellite suit une orbite circulaire de rayon r_0 autour de la Terre de rayon R_T . Sa vitesse est alors multipliée par un facteur α tout en restant orthoradiale. Trouver l'intervalle en α pour que sa trajectoire ne sorte pas du champ terrestre et que le satellite ne retombe pas sur la Terre.

Ex 1 a)

Lois physiques à appliquer :

- la conservation du moment cinétique pour un système isolé de 2 particules. Ici la plus massive est considérée fixe puisqu'on se place dans le référentiel héliocentrique. Le moment cinétique de l'ensemble se réduit donc au moment cinétique de la Terre.
- Le moment cinétique est particulièrement facile à écrire aux points Périgée P et Apogée A de la trajectoire elliptique parce que la vitesse est perpendiculaire au rayon vecteur, propriété valable **uniquement** en ces 2 points .

On va donc exprimer l'égalité du moment cinétique de la Terre en A et P. : $r_A v_A = r_P v_P$ $\boxed{\dfrac{v_P}{v_A} = \dfrac{r_A}{r_P} = 1{,}033}$

Avec 2a =r_A + r_p et r_A / r_p = 1,033, on calculer: r_p = 147,1.10^6 km et r_A = 152,1. 10^{6}km

b)

- La troisième loi de Kepler $\dfrac{a^3}{T_0^2} = \dfrac{GM_S}{4\pi^2}$ donne $\boxed{M_S = \dfrac{4\pi^2 a^3}{GT_0^2} = \dfrac{4\pi^2 149{,}6^3\, 10^{27}}{6{,}67.10^{-11}.(365.24.3600)^2} = 2.10^{30} kg}$
ce qui est un ordre de grandeur correct de la masse du Soleil.

c)

- La relation entre l'énergie totale E et le paramètre a de l'ellipse est $E = -\dfrac{GM_S M_T}{2a}$ (pour s'en souvenir il suffit de prendre le cas du mouvement circulaire et de remplacer le rayon du cercle par a).
- L'énergie totale est par définition la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de gravitation :
$E = \dfrac{1}{2} M_T v^2 - \dfrac{GM_T M_S}{r}$ d'où $\boxed{v = \sqrt{GM_S\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{a}\right)}}$
Remarquer que si a = r alors on retrouve la formule de la vitesse v(r) sur orbite circulaire.

d) Il suffit de remplacer r par r_P ou par r_A dans la formule précédente pour obtenir v_P ou v_A :

$$v_P = \sqrt{GM_S\left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}\right)} \qquad v_A = \sqrt{GM_S\left(\frac{2}{r_A} - \frac{1}{a}\right)}$$

et de tirer de la troisième loi de Kepler $\sqrt{GM_S} = 2\pi\frac{a\sqrt{a}}{T_0}$

Alors $\boxed{v_P = \frac{2\pi}{T_0}a\sqrt{a\left(\frac{2}{r_P} - \frac{1}{a}\right)} = 30{,}3\,km.s^{-1}}$ et $\boxed{v_A = \frac{2\pi}{T_0}a\sqrt{a\left(\frac{2}{r_A} - \frac{1}{a}\right)} = 29{,}3\,km.s^{-1}}$

On remarque bien que $v_P > v_A$ ce qu'indique la loi des aires : la surface balayée par le rayon vecteur pendant une durée définie est constante : puisque le Périgée est plus proche du Soleil que l'Apogée , il faut que la vitesse y soit plus grande.

Ex 2

1) Sur orbite circulaire le PFD appliqué au satellite ma = $-GM_T$ m / r avec a = $-v^2$ / r pour le mouvement circulaire uniforme conduit à la vitesse du satellite avant la déviation : $\boxed{V_{avant} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}}$

Pour un satellite en orbite circulaire l'énergie mécanique totale vérifie $E_m = -E_C$, d'où $\boxed{E_{m\,avant} = -\frac{GM_T m}{2r_0}}$

2) L'énergie mécanique n'est pas modifiée car la valeur de la vitesse ne l'est pas et le satellite est toujours en r_0 lors de la déviation. (Rappelons que $E_m = 1/2\ m\ v^2 - GM_T\ m/r$, ne dépend donc que de v et de r). $\boxed{E_{m\,après} = -\frac{GM_T m}{2r_0}}$

Le signe de l'énergie mécanique renseigne sur la nature de la trajectoire. Ici elle est négative donc la trajectoire est une ellipse.

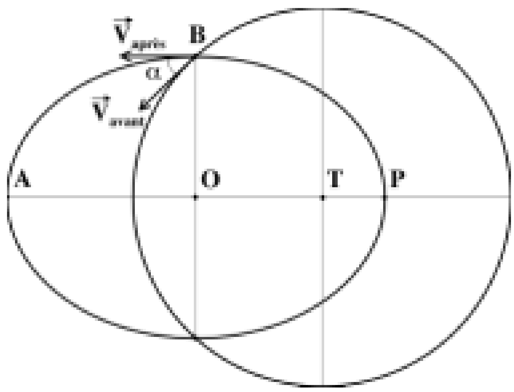
3)

- La relation entre l'énergie totale E_m et le paramètre a de l'ellipse est $E_m = -\frac{GM_T m}{2a}$ (pour s'en souvenir il suffit de prendre le cas du mouvement circulaire et de remplacer le rayon du cercle par a).

  On déduit de la relation de la question précédente que $\boxed{a = r_0}$
- Si a = r_0 alors le point où la déviation a été commise est le sommet B du petit axe de l'ellipse. En effet une des propriétés des paramètres de l'ellipse est TB = a (puisque T étant un foyer et T' l'autre foyer placé symétriquement par rapport à OB, on a 2a=TM+T'M par construction de l'ellipse, donc en B 2a=TB+T'B=2TB) . Or TB = r_0 puisque le satellite suivait le cercle de rayon r_0.
- En observant la figure on retrouve l'angle α = (OBT) ; en effet OB est perpendicualire à V_{avant} et TB est perpendiculaire à $V_{après}$; or deux angles à côtés perpendiculaires sont égaux . Ainsi OT = a sin α .

  et TP = OP-OT=a (1 – sin α) ç-à-d $\boxed{r_P = a(1-\sin\alpha) = r_0(1-\sin\alpha)}$

  De même on a TA = a (1 + sin α) ç-à-d $\boxed{r_A = a(1+\sin\alpha) = r_0(1+\sin\alpha)}$



Ex 3

- Tout d'abord, l'interaction gravitationnelle est largement négligeable par rapport à l'interaction électrostatique.
- Propriété d'un système isolé de deux particules en interaction : conservation de l'énergie totale du système

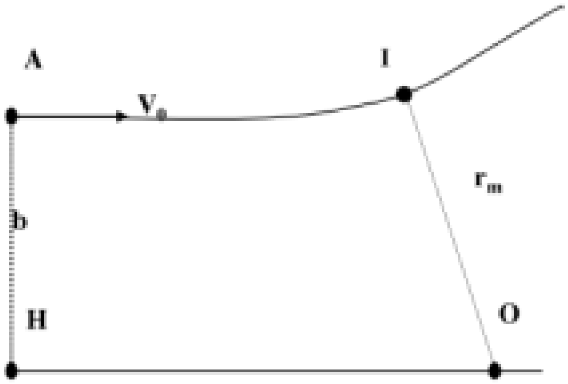
- Propriété d'un système soumis à force centrale : conservation du moment cinétique
- Ici le noyau d'or est beaucoup plus massif que le noyau d'hélium, le référentiel barycentrique de l'ensemble est donc quasiment le référentiel de laboratoire où l'origine est le noyau d'or. La masse réduite est quasiment la masse du noyau d'hélium.

Ainsi on peut écrire : $m_1 \vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 = m_1 \vec{r}_I \wedge \vec{v}_I$ pour la conservation du moment cinétique entre le point de départ A à l'infini et le point I minimal d'approche,

et $\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_\infty} = \frac{1}{2}mv_I^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_m}$ pour celle de l'énergie totale entre le départ et I.On peut négliger le terme d'énergie potentielle au point A puisque la distance est considérée comme infinie.

- L'interaction étant Newtonienne ç-à-d en $1/r^2$, et répulsive car les charges sont de même signe, la trajectoire est hyperbolique, ce que confirme le signe de l'énergie totale qui est positif. On remarque qu'au point A , $\vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}) \wedge \vec{v}_0 = \overrightarrow{HA} \wedge \vec{v}_0$ dont la norme est égale à bv_0 et qu'au point I $\vec{r}_I \wedge \vec{v}_I$ a comme norme $r_m\ v_I$. puisqu'en ce point de symétrie pour la trajectoire, vecteurs position et vitesse sont perpendiculaires. Ainsi $bv_0 = r_m\ v_I$.

On a donc deux équations à deux inconnues r_m et v_I . Il suffit d'éliminer v_I de l'une d'elles : $v_I = bv_0 /r_m$ et de l'introduire dans l'autre. Cela mène à une équation du second degré en r_m : $r_m^2 - \frac{Ze^2}{\pi\varepsilon_0 m v_0^2} r_m - b^2 = 0$ dont la solution (positive) est $r_m = \frac{1}{2}\left(\frac{Ze^2}{\pi\varepsilon_0 m v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{Ze^2}{\pi\varepsilon_0 m v_0^2}\right)^2 + 4b^2}\right)$ On remarque que $r_m > b$.



Ex 4 Au point M_0 où la vitesse est modifiée, l'énergie mécanique s'écrit : $E_m = \frac{1}{2}m\alpha^2 v_0^2 - \frac{GMm}{r_0}$

Pour que la trajectoire reste dans le champ terrestre il faut que $E_m \leq 0$ d'où : $\alpha^2 < \frac{2GM}{r_0 v_0^2}$

Or sur l'orbite circulaire initiale, la vitesse était $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$. On en déduit : $\alpha^2 < 2$

La trajectoire risque de rencontrer la Terre si la vitesse devient inférieure à v_0. La trajectoire ne sera plus circulaire mais nécessairement elliptique. La nouvelle vitesse restant orthoradiale, M_0 est ou le périgée ou l'apogée de l'ellipse qui sera décrite. Comme on envisage que v_0 diminue (pour écrire la condition de rencontre ou non avec la Terre), M_0 devient l'apogée , donc $r_0 = r_A$

Pour que le satellite ne rencontre jamais la Terre, il faut que la plus petite distance du satellite à la Terre soit toujours supérieure au rayon terrestre. Or comme la Terre reste le foyer de l'ellipse, la plus petite distance est le périgée. La condition de non rencontre avec la Terre est donc $r_P > R_T$.

Maintenant écrivons la relation pour les ellipses : $E_m = -\frac{GMm}{2a}$ et remarquons que $2a = r_A + r_P = r_0 + r_P$

Alors $E_m = \frac{1}{2}m\alpha^2 v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{GMm}{r_0 + r_P}$

Le calcul mène à $\alpha^2 = \frac{2}{1+\frac{r_0}{r_P}}$ (en se servant de $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ pour éliminer v_0)

La condition citée ci-dessus (non rencontre avec la Terre) donne : $\alpha^2 > \frac{2}{1+\frac{r_0}{R_T}}$

Résumé : Pour que le satellite ne retombe pas sur Terre et ne s'échappe pas de l'attraction terrestre, il faut :

$$\boxed{\frac{2}{1+\frac{r_0}{R_T}} < \alpha^2 < 2}$$