

Centrale PC 09

IA1) $\text{grad } T$ est dans le sens des t° croissantes

Loi de Fourier: $\vec{j}_Q = -\lambda \text{grad } T$

$j_Q = \frac{SQ}{Sdt}$ puissance surfacique en $W.m^{-2}$

λ conductivité thermique en $W.m^{-1}.K^{-1}$

Le signe - traduit le sens du courant de chaleur inverse de $\text{grad } T$: la chaleur va dans le sens des $t^\circ \searrow$

IA2) $P = \frac{U_0^2}{R_{ch}}$ donc $j_Q = \frac{P}{S} = \frac{P}{\pi(\frac{d}{2})^2}$

soit $j_Q = \frac{4U_0^2}{\pi d^2}$ ($j=0$)

IA3) En régime "stationnaire" titre du IA

on a $j_Q(y) S dt - j_Q(y+dy) S dt = 0$

chaleur entrant en y chaleur sortant de $y+dy$

donc j_Q est uniforme (car $j_Q(y) = j_Q(y+dy)$)

Comme $\vec{j}_Q = -\lambda \text{grad } T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \vec{e}_y = \text{cte}$

soit $-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \text{cte} = j_Q(y=0) = \frac{4U_0^2}{\pi d^2}$

d'où l'équo. diff: $\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{4U_0^2}{\lambda \pi d^2}$

IA4) Intégrons $T(y) = -\frac{4U_0^2}{\lambda \pi d^2} y + \text{cte}$

C.L: en L on a $T(L) = 20^\circ C$

$\rightarrow T(y) = -\frac{4U_0^2}{\lambda \pi d^2} (y-L) + T(L)$

$T_{P_1} = -\frac{4U_0^2}{\lambda \pi d^2} (y_1-L) + T(L)$

$T_{P_2} = -\frac{4U_0^2}{\lambda \pi d^2} (y_2-L) + T(L)$

Soustraire: $\lambda = \frac{4U_0^2}{\pi d^2} \frac{(y_2-y_1)}{T_{P_1}-T_{P_2}}$

AN: $\lambda = \frac{4 \times 6^2}{8 \times \pi \times 15^2 \times 10^{-6}} \times \frac{(16-8)10^{-2}}{(46,4-41,4)}$

$\lambda = 407,4 W.m^{-1}.K^{-1}$

IA5) Le délit volumique d_v est le volume circulant par unité de temps; il passe donc la masse ρd_v par unité de temps (où ρ = masse volumique du liquide)

Cette masse d'eau va passer d'une t° avant à une t° aval $\Delta T = T_{aval} - T_{avant} > 0$ en prenant la chaleur diffusée dans la barre à l'abscisse $y=L$; ainsi: $j_Q(L) S = \rho d_v c \Delta T$

d'où $\Delta T = \frac{j_Q \pi d^2}{4 \rho d_v c}$ avec $j_Q(L) = j_Q = \frac{4U_0^2}{\pi d^2}$

$\Delta T = \frac{U_0^2}{R_{ch} \rho d_v c}$

ρ : masse volumique du liquide de refroidissement
 c : sa capacité calorifique massique

IB1) $\lambda \sim W.m^{-1}.K^{-1}$ et le $W = J.s^{-1}$

$\rho \sim kg.m^{-3}$

$c_p \sim J.kg^{-1}.K^{-1}$

$\frac{\lambda}{c_p} \sim kg.m^{-1}.s^{-1}$ et $\frac{\lambda}{c_p \rho} \sim m^2.s^{-1} \rightarrow D = \frac{\lambda}{c_p \rho}$

IB2) Toujours en analyse dimensionnelle:

$R_{th} = \frac{\Delta T}{\phi}$ donc $r_{th} \sim \frac{\Delta T}{\phi L}$ ϕ : puissance

$SQ = c_{th} L \Delta T$ car c_{th} capacité thermique (unité longueur)

donc $c_{th} \sim \frac{SQ}{L \Delta T}$

Ainsi $r_{th} c_{th} \sim \frac{SQ}{\phi L^2}$ or ϕ est une puissance donc $\frac{SQ}{\phi} \sim t$

On retrouve alors $D \sim \frac{1}{r_{th} c_{th}}$ $D = \frac{1}{r_{th} c_{th}}$

IB3) $D \sim \frac{L^2}{t}$ où L et t sont des grandeurs caractéristiques de variations de grandeurs physiques.

d'où $\Delta t = \frac{(z_2-z_1)^2}{D}$

Le régime transitoire durera $\Delta t \approx \frac{L^2}{D}$

AN $\Delta t = \frac{0,5^2}{1,19 \cdot 10^{-4}} = 2100s \approx 35 \text{ minutes}$

Il peut sembler aisé d'étudier des phénomènes de propagation dans le matériau étudié puisque le temps de régime transitoire est suffisamment long.

IB4) $j_Q(z) S dt - j_Q(z+dz) S dt = \rho S dz c \frac{\partial T}{\partial t} dt$

soit $j_Q(z) S dt - j_Q(z+dz) S dt = \rho S dz c \frac{\partial T}{\partial t} dt$

$-\frac{\partial j_Q}{\partial z} dz S dt = \rho S dz c \frac{\partial T}{\partial t} dt$

Avec la loi de Fourier $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$ cela mène à:

$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$ c'est-à-dire: $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

IB5) La diffusion thermique est irréversible car si on change t en $-t$ dans l'équation différentielle, on ne retrouve pas la même équation, contrairement aux équations de type d'Alembert $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$ par exemple

IC1) On imagine que l'amplitude de $\theta_m(z)$ décroît avec z ce qui ferait de la courbe supérieure celle qui correspond à $T(z, t)$
On lit $\frac{14}{2}$ graduations pour $\theta_m(z_1)$
On 5 graduations correspondent à 2°C
Donc $\theta_m(z_1) = \frac{7}{5} \times 2 = \frac{14}{5} = 2,8^\circ\text{C}$

On lit $\frac{7}{2}$ graduations pour $\theta_m(z_2)$, la moitié de $\theta_m(z_1)$ donc $\theta_m(z_2) = 1,4^\circ\text{C}$

Pour le déphasage, la courbe de z_2 est en retard de celle de z_1 . On compte 2 carreaux de décalage, or 5 carreaux correspondent à 100° .
Donc 2 carreaux correspondent à $2 \times \frac{100}{5} = 40^\circ$
La période est lue sur 20 carreaux donc $T = 400^\circ$
La période correspond à 2π

Le déphasage entre les 2 courbes est $40 \times \frac{2\pi}{400} = 0,1\pi$
Avec la convention $\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$ on a $\varphi < 0$ pour le retard de z sur t .
 $\varphi = -0,1 \times 2\pi$ $\varphi = -0,62 \text{ rad}$

IC2) On a toujours $f(t) = \frac{U(t)}{R_{ch}}$

Avec $U(t) = U_0 \sqrt{2} \cos 2\Omega t$: $f(t) = \frac{2U_0 \cos 2\Omega t}{R_{ch}}$

Avec $\cos^2 2\Omega t = \frac{\cos 4\Omega t + 1}{2}$: $f(t) = \frac{U_0^2}{R_{ch}} (1 + \cos 4\Omega t)$

Avec $P_0 = \frac{U_0^2}{R_{ch}}$ et $\omega = 2\Omega$: $f(t) = P_0 + P_0 \cos \omega t$

La température varie en $\cos(\omega t + \varphi)$ donc avec une fréquence double de la tension
On a lu $T = 400^\circ$ donc $\omega = \frac{2\pi}{T}$
d'où $\Omega = \frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{T}$ et la fréquence $F = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{4T}$

La fréquence de la tension est $\frac{1}{2 \times 400} = 1,25 \text{ mHz}$

IC3) Le bilan thermique est identique à IB4):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Comme $T = T_p(z) + \theta_m(z) \cos(\omega t + \varphi(z)) = T_p(z) + \theta(z, t)$

$T_p(z)$ représente la solution du régime permanent

Ce régime permanent a été étudié en IA (2) et a conduit à une température linéaire en z ; ainsi $\frac{\partial^2 T_p}{\partial z^2} = 0$; de plus T_p ne dépend pas de t .
Du coup on a bien encore : $\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$

Posons $\theta = A \exp(j(\omega t - Kz))$ alors (avec A constant)
 $j\omega = -DK^2$ soit $K^2 = -j \frac{\omega}{D}$

La "racine carrée" de $-j$ est $\frac{1-j}{\sqrt{2}}$
 $K = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2D} (1-j)} = \pm \frac{1-j}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$

Remplaçons $D = \frac{\lambda}{c_p \rho}$ $\rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{c_p \rho \omega}}$

Rappelons $D = \frac{1}{\rho c_p k_{th}}$ $\rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2}{\rho c_p k_{th} \omega}}$

IC4) Alors $\theta = A \exp(j(\omega t - \varepsilon \frac{1-j}{\delta} z))$
càd $\theta = A \exp(-\frac{\varepsilon}{\delta} z) \exp(j(\omega t - \frac{\varepsilon}{\delta} z))$

La barre étant semi-infinie : $z \rightarrow +\infty$
On ne peut s'attendre à une température croissant infiniment donc $\varepsilon > 0$ càd $\varepsilon = 1$

Alors $\theta = A \exp(-\frac{z}{\delta}) \exp(j(\omega t - \frac{z}{\delta}))$
soit $\theta = A e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$
Or $\theta \equiv \theta_m(z) \cos(\omega t + \varphi(z))$ $\Rightarrow \theta_m(z) = A e^{-\frac{z}{\delta}}$
 $\varphi(z) = -\frac{z}{\delta}$

Calculons $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,15 \times 10^{-4}}{\frac{2\pi}{400}}} \leftarrow$ donné en IB2

$$\delta = 0,12 \text{ m} = 12 \text{ cm}$$

50 cm représente 4 fois la longueur caractéristique. L'approximation de barre infinie est possible mais pas largement évidente.

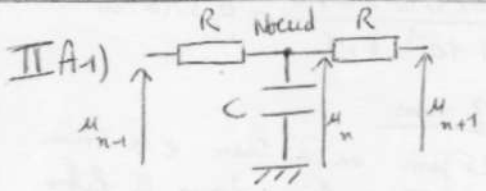
IC5) On observe l'amortissement de l'amplitude entre z_1 et z_2 . On lit 7 carreaux d'amplitude pour z_1 , qui passe à 3,5 pour z_2 .
Donc $\frac{3,5}{7} = \exp(-(z_2 - z_1)/\delta)$ soit $\delta = \frac{z_2 - z_1}{\ln \frac{7}{3,5}}$

AN $\delta = \frac{(16-8) \times 0,01}{\ln \frac{7}{3,5}} = 11,5 \text{ cm}$ ce qui correspond environ au 12 cm calculé précédemment

2^e façon de déduire δ : on a vu que le déphasage variait comme $-\frac{z}{\delta}$ donc $\varphi(z_2) - \varphi(z_1) = -\frac{z_2 - z_1}{\delta}$

Or ce déphasage a été calculé en IC1 : $\varphi = -0,62 \text{ rad}$
d'où $\delta = \frac{z_2 - z_1}{0,62} = \frac{0,01(16-8)}{0,62} = 12,9 \text{ cm}$ valeur satisfaisante avec les résultats précédents

IC6) Il s'agit d'une onde progressive car en $\cos(\omega t - \frac{z}{\lambda})$ plane car d'amplitude constante dans un plan $z = \text{cte}$



Loi des nœuds : $\frac{u_{n-1} - u_n}{R} = C \dot{u}_n + \frac{u_n - u_{n+1}}{R}$

En régime permanent, avec la notation complexe : $i\omega$ au lieu de $\dot{}$

d'où $\frac{u_{n-1} - u_n}{R} = jRC\omega u_n + \frac{u_n - u_{n+1}}{R}$

IIA2) Solution proposée : $u_n = h^n u_0 \Rightarrow$

$h^{n-1} - h^n = jRC\omega h^n + h^n - h^{n+1}$

Divisons par h^{n-1} : $1 - h = jRC\omega h + h - h^2$

soit $h^2 - (2 + jRC\omega)h + 1 = 0$

IIA3) $\Delta = (2 + jRC\omega)^2 - 4 \approx 4jRC\omega$ en négligeant $RC\omega^2$

Solutions : $h \approx \frac{1}{2} (2 + jRC\omega \pm 2\sqrt{jRC\omega})$

Avec $j^{\frac{1}{2}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \rightarrow h = 1 + \frac{1}{2}jRC\omega \pm \sqrt{\frac{RC\omega}{2}}(1+j)$

En négligeant $RC\omega$ par rapport à $\sqrt{RC\omega}$ on a bien :

$h = 1 \pm (1+j)\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}$ OK

IIA4) Le caractère complexe de h signale un déphasage que prend la tension d'une cellule à l'autre.

Module : $|h| = |1 \pm \sqrt{\frac{RC\omega}{2}} \pm j\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}|$

$|h| = \sqrt{(1 \pm \sqrt{\frac{RC\omega}{2}})^2 + \frac{RC\omega}{2}} = \sqrt{1 \pm 2\sqrt{\frac{RC\omega}{2}} + \frac{RC\omega}{2}}$

d.l. $|h| \approx 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2RC\omega} \approx 1 \pm \sqrt{\frac{RC\omega}{2}}$ au 2^{im} ordre près en $\sqrt{RC\omega}$

Si on considère la chaîne inférieure on ne peut pas s'attendre à une tension dont le module croît infiniment. Il faut donc $|h| < 1$ donc

$|h| \approx 1 - \sqrt{\frac{RC\omega}{2}}$

II B1) Ainsi $|u_n| = |h|^n |u_0|$

soit en amplitude $U_n = |h|^n U_0 \approx (1 - \sqrt{\frac{RC\omega}{2}})^n U_0$

d.l. $U_n \approx (1 - n\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}) U_0$

Or $\exp(-\frac{n}{n_0}) \approx 1 - \frac{n}{n_0} \approx 1 - n\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}$

Donc $\frac{U_n}{U_0} \approx \exp(-\frac{n}{n_0})$ avec $n_0 = \sqrt{\frac{2}{RC\omega}}$

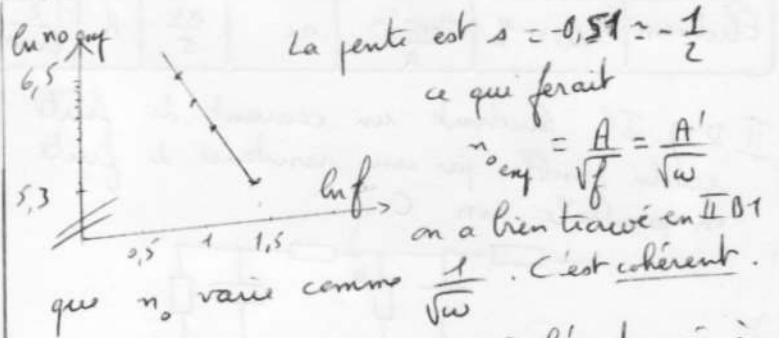
II B2) La condition pour écrire $\exp(-\frac{n}{n_0}) \approx 1 - \frac{n}{n_0}$ est que $\sqrt{\frac{2}{RC\omega}} \gg n$ soit $RC\omega \ll \frac{2}{n^2}$

Pour considérer la chaîne comme infinie, il faut que n dépasse 10 car alors on a bien $RC\omega \ll 1$

II C1) Admettant $n_{0\text{exp}} = A f^s$ on aura alors

$\ln n_{0\text{exp}} = \ln A + s \ln f$ Le graphe de $\ln n_{0\text{exp}}$ en fonction de $\ln f$ doit donc être une droite

f	200	350	500	650
$n_{0\text{exp}}$	4,0	3,0	2,5	2,2
$\ln f$	5,30	5,86	6,21	6,48
$\ln n_{0\text{exp}}$	1,38	1,10	0,92	0,79



II C2) On déduit du tracé l'ordonnée à l'origine. (Soit avec un tracé plus précis soit par calculatrice en régression linéaire)

On trouve par tracé plus précis : $\ln A = 8,1$

Comme en théorie $n_0 = \sqrt{\frac{2}{RC\omega}} = \sqrt{\frac{1}{RC\omega}}$

On a $A = \sqrt{\frac{1}{RC\omega}}$ d'où $C = \frac{1}{R\pi A^2}$

AN : $C = \frac{1}{10^{-3} \times \pi \times e^{8,1 \times 2}} = 29 \text{ pF}$

II D1) Reprenons la loi des nœuds en régime quelconque

$\frac{u_{n-1} - u_n}{R} = C \dot{u}_n + \frac{u_n - u_{n+1}}{R}$

avec $u_n = u(x, t)$

$u_{n+1} = u(x+a) = u(x) + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$u_{n-1} = u(x-a) = u(x) - a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

d'où
$$\left(-a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = RC \frac{\partial u}{\partial t} + \left(-\frac{a \partial u}{\partial x} - \frac{a^2 \partial^2 u}{2 \partial x^2} \right)$$

soit
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2 \partial^2 u}{RC \partial x^2} \quad \boxed{rc = \frac{RC}{a^2}}$$

rc est homogène à un temps divisé par longueur²
 $rc \sim t \cdot L^{-2}$ en s.m⁻²

II D2) On peut relier IB4 avec $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

et $D = \frac{1}{rc}$

à $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{rc} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ d'où $\begin{matrix} T \leftrightarrow u \\ rc \leftrightarrow R \\ \partial t \leftrightarrow C \end{matrix}$

On avait en IC3 θ variant en $e^{-\frac{x}{\delta}}$
 Ici en II D1 U varie en $e^{-\frac{x}{\lambda_0}} = e^{-\frac{x}{\delta}}$

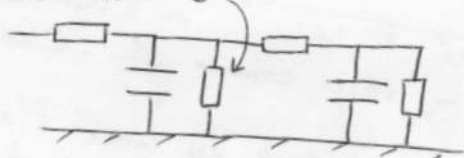
$\delta = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_p w}}$ est relié à $\lambda_0 = \sqrt{\frac{2a^2}{RCw}} = \sqrt{\frac{2}{rcw}}$

$\frac{u_{n+1} - u_n}{R} = i$ est relié à $\phi = \frac{\Delta T}{R_{th}}$

λ est relié à σ conductivité électrique

T	$T(x,t) - T_0$	$\frac{\Delta T}{R_{th}}$	$\lambda_{th} C_{th}$	ρ_p	R_{th}	δ
Electron	$u(x,t) - u_0$	$\frac{u_{n+1} - u_n}{R}$	rc	$\frac{\pi c}{\sigma}$	R	$\sqrt{\frac{2}{rcw}} = \delta$

II D3) Il faudrait un courant de fuite rendu possible par une résistance de fuite en parallèle avec C



B1) On a vu en IC3) l'épaisseur de peau

$$\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho_p w}}$$

et que la température n'évolue pas trop, il faut que $e \ll \delta$

énoncé donne C capacité thermique
 était la capacité thermique massique
 la masse volumique

ρ_p est la capacité thermique volumique
 a donc $C_T = \rho_p \cdot Se$ volume du film cristallin

L'énoncé donne la fréquence de 1 Hz
 $\omega = 2\pi f$

Ainsi $e \ll \sqrt{\frac{2\lambda Se}{C_T 2\pi f}} \quad e \ll \sqrt{\frac{\lambda Se}{C_T \pi f}}$

AN $e \ll \sqrt{\frac{100 \times 4 \times 10^{-6} \times 25 \times 10^{-6}}{3,1 \cdot 10^{-4} \times \pi \times 1}} = 0,3 \cdot 10^{-2} m$

soit $e \ll 3 mm$

Comme $e = 25 \mu m$ on a bien $e \ll 3 mm$
 L'hypothèse de T uniforme dans le film est bien validée.

III B2) $R_{th} = \frac{T(t) - T_1}{\phi}$ car $R \sim K \cdot W^{-1}$
 $\phi \sim W$ et $T \sim K$

III B3) Si la T° est uniforme c'est que la densité de courant thermique est nulle...
 puisque $\vec{j}_\theta = -\lambda \text{grad} T$
 c'est un simple bilan calorimétrique :
 la puissance lumineuse absorbée va servir à augmenter la T° du film mais en m temps il y a perte par le conducteur thermique placé entre le film et le support.

Soit $\phi_e dt = \frac{T(t) - T_1}{R_T} dt = C_T dT$

d'où
$$\frac{dT}{dt} + \frac{T - T_1}{R_T C_T} = \frac{\phi_e}{C_T} = \frac{\phi_a}{C_T} + \frac{\phi_m \cos \omega t}{C_T}$$

III B4) Si $\phi_p = \phi_0$ alors $\frac{dT}{dt} = 0$ puisque $T = T_0$
 Ainsi $\frac{T_0 - T_1}{R_T C_T} = \frac{\phi_0}{C_T} \rightarrow \boxed{T_0 = T_1 + R_T \phi_0}$

III B5) $\theta \equiv T(t) - T_0$ Posons $\theta = \theta_m e^{j\omega t}$
 avec $\phi_a = \phi_m e^{j\omega t}$ soit $\phi_0 = 0$ (composante continue)
 donc $T_0 = T_1$ d'après B4

$$\frac{d(T - T_0)}{dt} + \frac{T - T_0}{R_T} = \frac{\phi_m \cos \omega t}{C_T}$$

En complexe : $j\omega \theta + \frac{\theta}{R_T} = \frac{\phi_a}{C_T}$

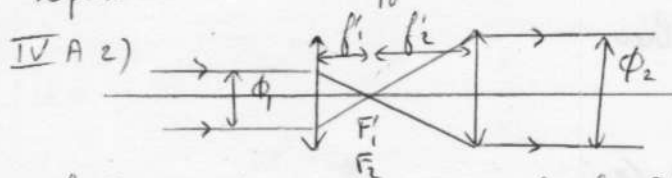
soit $\theta = \frac{\phi_a}{C_T} \cdot \frac{1}{(j\omega + \frac{1}{R_T})} = \frac{\phi_a}{C_T} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{R_T} + j\omega C_T)}$

ainsi on a bien $\theta = \frac{\phi_a R_T}{j\omega C_T + 1}$ (ok)

III B6) Amplitude $|\theta| = \frac{\phi_m R_T}{\sqrt{1 + (\omega C_T)^2}}$

AN: $|\theta| = \frac{10^{-6} \times 512}{\sqrt{1 + (2\pi \times 1 \times 512 \times 3,1 \cdot 10^{-4})^2}} = 0,36 mK$

IV A1) On noircit la face avant du film alu pour que le rayonnement lumineux soit absorbé par la matière ce qui provoque son échauffement. Sinon on aurait surtout réflexion sans échauffement de l'alu.



Il faut réaliser un système afocal : $f_1' = f_2'$ avec $\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{f_2'}{f_1'}$ en respectant $f_1' + f_2' = 12 \text{ cm}$

soit $\frac{f_2'}{f_1'} = \frac{25}{5} = 5$ et $f_1' + f_2' = 12$

d'où $f_1' = 2 \text{ cm}$ et $f_2' = 10 \text{ cm}$

IV B1) Il y a continuité de la t° à l'interface donc $\Theta_i(z=0) + \Theta_r(z=0) = \Theta_t(z=0)$

IV B2) Il y a continuité du flux thermique à l'interface : $j_i(z=0) + j_r(z=0) = j_t(z=0)$

soit $\lambda_1 \left(\frac{\partial \Theta_i}{\partial z}(z=0) + \frac{\partial \Theta_r}{\partial z}(z=0) \right) = \lambda_2 \frac{\partial \Theta_t}{\partial z}(z=0)$

IV B3) La propagation de l'onde incidente et de l'onde transmise est dans le sens $z \uparrow$ donc $\cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$

Par contre elle se fait dans le sens $z \downarrow$ pour l'onde réfléchie donc $\cos(\omega t + \frac{z}{\delta})$

On retrouve δ_1 pour l'onde incidente et réfléchie qui se propagent dans le même milieu 1.

Par contre on a δ_2 pour l'onde transmise qui se propage dans un milieu différent.

L'onde s'atténue au fur et à mesure de sa propagation donc $\exp(-\frac{z}{\delta})$ pour l'onde incidente et transmise qui vont vers $z \uparrow$ et $\exp(+\frac{z}{\delta})$ pour l'onde réfléchie qui va vers $z \downarrow$

IV B4) Les ondes sont planes et progressives (amplitude indépendante de x et y). La notation complexe est adaptée.

IV B5) Reprenons IV B1) $\underline{A}_i + \underline{A}_r = \underline{A}_t$
et IV B2) $\lambda_1 j \underline{k}_1 (\underline{A}_i - \underline{A}_r) = \lambda_2 \underline{A}_t j \underline{k}_2$

La comparaison des notations réelle et complexe mène à : $\underline{k}_1 = \frac{1}{\delta_1} (1-j)$ $\underline{k}_2 = \frac{1}{\delta_2} (1-j)$

d'où $\lambda_1 \delta_2 (\underline{A}_i - \underline{A}_r) = \lambda_2 \delta_1 \underline{A}_t$

IV B.6) La résolution mène à :

$$r = \frac{\lambda_1 \delta_2 - \lambda_2 \delta_1}{\lambda_1 \delta_2 + \lambda_2 \delta_1} \quad t = \frac{2 \lambda_1 \delta_2}{\lambda_1 \delta_2 + \lambda_2 \delta_1}$$

Avec $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho_p \omega}}$ on obtient : $\frac{\delta}{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{\lambda \rho_p \omega}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho_p \omega}}$

$$r = \frac{\frac{\lambda_1}{\delta_1} - \frac{\lambda_2}{\delta_2}}{\frac{\lambda_1}{\delta_1} + \frac{\lambda_2}{\delta_2}} = \frac{e_1 - e_2}{e_1 + e_2}$$

$$r = \frac{e_1 - e_2}{e_1 + e_2}$$

$$t = \frac{2 \frac{\lambda_1}{\delta_1}}{\frac{\lambda_1}{\delta_1} + \frac{\lambda_2}{\delta_2}} = \frac{2 e_1}{e_1 + e_2}$$

$$t = \frac{2 e_1}{e_1 + e_2}$$

IV B.7) $e_1 \ll e_2$: $r \approx -1$ $t \approx 0$
 $e_1 \gg e_2$: $r \approx 1$ $t \approx 2$

Une très grande émissivité du milieu 2 donne une amplitude nulle pour les variations de température dans le milieu 2 comme si il n'y avait pas le temps d'établir un lien thermique. Une très faible émissivité du milieu 2 donne l'effet contraire, le lien thermique s'établit bien.

Fin de la question III B.6. :

Le déphasage est donné par

$$\tan \varphi = -\omega \tau$$

$$\tan \varphi = -2\pi \cdot 1.016 = -1$$

Avec $\cos \varphi > 0$ et $\sin \varphi < 0$ cela correspond à $\varphi = -45^\circ$