

II Diffraction du jet atomique par une onde stationnaire

À l'aide d'un laser de longueur d'onde $\lambda_L = 671 \text{ nm}$, on crée une onde plane et progressive, polarisée rectilignement selon $\vec{u}_y$, de vecteur d'onde $\vec{k}_L$ et de pulsation ω_L , qui se propage dans la direction $\vec{u}_x$. Le champ électrique de cette onde s'écrit :

$$\vec{E}_+(x, t) = \vec{u}_y E_+(x, t) = \vec{u}_y E_0 \cos(\omega_L t - k_L x)$$

II.A - Onde stationnaire

L'onde laser se réfléchit en incidence normale sur un miroir plan assimilé à un miroir métallique parfaitement conducteur, situé dans le plan $x = x_M$.

Montrer que le champ électrique de l'onde stationnaire résultante s'écrit $\vec{E}(x, t) = \vec{u}_y E(x) \sin(\omega_L t - k_L x_M)$. Préciser l'expression de $E(x)$ en fonction de E_0 , k_L , et x_M .

II.B - Notion de potentiel lumineux

On s'intéresse d'abord à l'interaction de cette onde stationnaire avec les atomes de lithium. Lorsqu'ils pénètrent dans la zone où règne le champ $\vec{E}$, les atomes se polarisent. Lorsque la pulsation ω_L est très éloignée des résonances atomiques, les dipôles induits oscillent à la pulsation ω_L du laser excitateur et en phase avec lui : le dipôle atomique induit s'écrit alors $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$, où α est la polarisabilité de l'atome de lithium. Dans les

conditions de l'expérience (laser hors de résonance), on a $\alpha = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{d^2}{\hbar \delta_L}$ où $d = 3,45 \times 10^{-29} \text{ C}\cdot\text{m}$ est une constante caractérisant le dipôle de l'atome de lithium et où $\delta_L = \omega_L - \omega_0$ est l'écart entre la pulsation laser ω_L et la pulsation ω_0 de la transition atomique la plus proche. Le champ lumineux interagit avec le dipôle atomique $\vec{p}$ qu'il induit via une énergie potentielle $V = -\frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{E}$, appelée *potentiel lumineux*.

II.B.1) Montrer que la moyenne temporelle de ce potentiel lumineux s'écrit sous la forme

$$W(x) = -\frac{1}{2} V_0 (1 - \cos(k_L(x - x_M)))$$

II.B.2) Exprimer V_0 et k_L en fonction des paramètres du problème.

II.C - Équation de propagation de l'onde de matière

Un jet supersonique de lithium se propage dans le plan (Oxz) à une vitesse $v = 1060 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et traverse l'onde lumineuse stationnaire générée par un miroir (M) (figure 4). Un atome de lithium est assimilé à un paquet d'ondes de matière décrit par sa fonction d'onde $\psi(x, z, t)$ dont le module au carré donne la densité de probabilité de présence de l'atome dans l'espace à trois dimensions. On s'intéresse ici exclusivement au processus élastique de diffusion des atomes par l'onde lumineuse stationnaire, de sorte que l'énergie de l'atome peut être considérée comme fixée et égale à son énergie cinétique incidente E_i . La partie spatiale $\varphi(x, z)$ de sa fonction d'onde obéit alors à l'équation de Schrödinger

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + W(x) \varphi &= E_i \varphi && \text{à l'intérieur de l'onde stationnaire } (0 < z < D) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) &= E_i \varphi && \text{à l'extérieur de l'onde stationnaire } (z < 0 \text{ ou } z > D) \end{aligned}$$

où $m = 1,16 \times 10^{-26} \text{ kg}$ est la masse de l'atome de lithium et E_i son énergie totale, égale à son énergie cinétique incidente.

II.C.1) Rappeler l'expression de la longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} de l'atome incident et l'évaluer numériquement dans le cas présent.

II.C.2) On assimile le paquet d'onde atomique incident à une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k}_i$. Relier $\vec{k}_i$ à la quantité de mouvement de l'atome $m\vec{v}$ et en déduire l'expression de son énergie E_i . L'évaluer numériquement.

On supposera dans la suite que la profondeur V_0 du potentiel lumineux est beaucoup plus faible que l'énergie E_i de l'atome.

II.C.3) Écrire l'équation de propagation, dans un milieu d'indice $n(x)$, d'une onde lumineuse $\vec{E}(x, z, t)$ de vecteur d'onde dans le vide $\vec{k}$ et de pulsation ω .

II.C.4) En déduire que la propagation de l'onde de matière à l'intérieur de l'onde stationnaire est régie par une équation similaire à celle d'une onde lumineuse dans un milieu d'indice $n(x)$ modulé périodiquement. Quel est le pas Λ de ce réseau d'indice ? L'évaluer numériquement. Donner l'expression de l'amplitude n_1 de modulation de l'indice en fonction de V_0 et E_i .

Etablir une analogie entre ces équations et celles de Schrödinger.

II.C.5) On écrit l'équation de propagation de l'onde de matière à l'intérieur de l'onde stationnaire sous la forme suivante

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k_i^2 \varphi = 4k_i K \cos(k_i(x - x_M)) \varphi \quad (II.1)$$

Exprimer K en fonction de n_1 et λ_{dB} .

← Personnellement je trouve ce terme en plus.

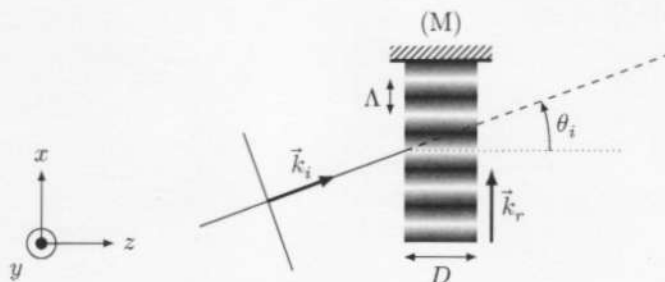


Figure 4 Réseau lumineux de pas Λ et d'épaisseur D

II.D - Résolution de l'équation de propagation

Le faisceau lumineux qui crée l'onde stationnaire est limité transversalement par un diaphragme de rayon $R = 5 \text{ mm}$. Le réseau lumineux sur lequel vont se diffracter les ondes atomiques a donc une épaisseur $D = 2R$ (figure 4). Deux fentes très fines, de largeur $\sim 10 \mu\text{m}$, sont placées le long du jet supersonique, de manière à sélectionner très précisément l'angle d'incidence θ_i des atomes sur le réseau lumineux (l'orientation de l'angle θ_i est précisée sur la figure 4). Dans ces conditions, on montre que seules deux ondes planes se propagent simultanément dans le réseau lumineux : l'onde incidente $\varphi_i(\vec{r})$ d'amplitude $\beta_i(z)$ et de vecteur d'onde $\vec{k}_i$, et l'onde diffractée $\varphi_d(\vec{r})$ d'amplitude $\beta_d(z)$ et de vecteur d'onde $\vec{k}_d = \vec{k}_i + q\vec{k}_r$ où $q = \pm 1$ et où $\vec{k}_r = k_r \vec{u}_x$ caractérise la périodicité du réseau lumineux et est choisi ici de même sens que le vecteur d'onde $\vec{k}_L$ de l'onde laser incidente sur le miroir (M). On considère dans la suite le cas $q = -1$.

II.D.1) Montrer que la conservation de l'énergie cinétique de l'atome, entre son entrée dans le réseau et sa sortie dans l'ordre $q = -1$ de diffraction, implique une certaine relation que l'on explicitera entre l'angle d'incidence θ_i , le pas Λ du réseau et la longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} de l'atome.

II.D.2) Évaluer numériquement l'angle d'incidence, noté θ_B , qui satisfait cette relation.

II.D.3) Quel angle fait le faisceau diffracté avec l'axe $\vec{u}_z$ dans ces conditions ? Faire un schéma illustrant la disposition relative des traits du réseau et des vecteurs d'onde $\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$ et $\vec{k}_d$.

II.D.4) On cherche les solutions de l'équation de propagation (II.1) sous la forme

$$\beta_i(z)e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + \beta_d(z)e^{i\vec{k}_d \cdot \vec{r}}$$

a) Que représente physiquement chacun des termes de cette solution ?

On admet

$$\begin{cases} \frac{d^2 \beta_i}{dz^2} + 2ik_{iz} \frac{d\beta_i}{dz} = 2k_i K e^{-ik_r x_M} \beta_d \\ \frac{d^2 \beta_d}{dz^2} + 2ik_{iz} \frac{d\beta_d}{dz} = 2k_i K e^{ik_r x_M} \beta_i \end{cases}$$

$$\vec{k}_{iz} = \vec{k}_i \cdot \vec{u}_z$$

II.D.5) On impose les conditions aux limites $\beta_i(z=0) = \beta_0$ et $\beta_d(z=0) = 0$. En préciser la signification physique. Que représente β_0 ?

II.D.6) On suppose que les amplitudes des deux ondes sont lentement variables à l'échelle de λ_{dB} . Justifier que cela permet de négliger les dérivées secondes dans le système d'équations couplées ci-dessus.

II.D.7) En déduire que l'amplitude $\beta_i(z)$ satisfait à une équation différentielle de la forme $\frac{d^2 f}{dz^2} + \nu^2 f = 0$. Expliciter la constante positive ν en fonction de K et $\cos \theta_i$.

II.D.8) Résoudre cette équation différentielle en utilisant les conditions aux limites précisées en II.D.5).

II.D.9) En déduire l'expression de $\beta_d(z)$ et celles des ondes planes $\varphi_i(\vec{r})$ et $\varphi_d(\vec{r})$ en sortie d'onde stationnaire, c'est-à-dire pour $z = D$. Commenter ces solutions. L'approximation des amplitudes lentement variables vous semble-t-elle justifiée ici ?

A) $E_+ = E_0 \cos(\omega t - k_L x)$

Complexe : $\underline{E}_+ = E_0 e^{i(\omega t - k_L x)}$

La réflexion sur un miroir va créer un champ réfléchi en $\underline{E}_- = E'_0 e^{i(\omega t + k_L x)}$ qui doit obéir à la condition limite champ résultant nul en x_n où est placé ce miroir :

en x_n $\underline{E}_+(x_n) + \underline{E}_-(x_n) = 0$

soit $E_0 e^{-ik_L x_n} + E'_0 e^{ik_L x_n} = 0$

d'où $E'_0 = -E_0 e^{-2ik_L x_n}$

Le champ résultant est ainsi :

$\underline{E} = \underline{E}_+ + \underline{E}_- = E_0 e^{i(\omega t - k_L x)} - E_0 e^{-2ik_L x_n} e^{i(\omega t + k_L x)}$

$\underline{E} = E_0 e^{i(\omega t - k_L x_n)} [e^{ik_L(x - x_n)} - e^{ik_L(x - x_n)}]$

$\underline{E} = E_0 e^{i(\omega t - k_L x_n)} (-2i \sin k_L(x - x_n))$

on a bien $E = 2E_0 \sin k_L(x - x_n) \sin(\omega t - k_L x_n)$
 $E(x) = 2E_0 \sin k_L(x - x_n)$

B1) $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \langle \vec{E}_0 \times E^L \rangle = E_0 \times \frac{4E_0^2 \sin^2 k_L(x - x_n)}{2}$

Comme $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, on a bien :

$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = E_0 \times E_0^L (1 - \cos 2k_L(x - x_n))$

soit $W = \langle V \rangle = \langle -\frac{1}{2} \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = -\frac{1}{2} E_0 E_0^L (1 - \cos 2k_L(x - x_n))$

Ainsi $W = -\frac{1}{2} V_0 (1 - \cos k_L(x - x_n))$ avec

B2) $V_0 = E_0 \times E_0^L$ et $k_L = 2k_L$

C1) $\lambda_{dB} = \frac{h}{f} = \frac{h}{m\nu} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{1,16 \cdot 10^{-26} \cdot 1060}$

$\lambda_{dB} = 54 \text{ pm}$ (ou 53,8 pm)

C2) $f_i = \frac{h}{h_i}$ $f_i = m\nu \rightarrow \frac{h}{h_i} = \frac{m\nu}{h}$

$E_i = \frac{1}{2} m\nu^2$

AN : $E_i = \frac{1}{2} \cdot 1,16 \cdot 10^{-26} \cdot 1060^2 = 0,65 \cdot 10^{-20} \text{ J}$

ou $E_i = \frac{0,65 \cdot 10^{-20}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,041 \text{ eV}$

C3) Dans le vide, l'équation de propagation d'une onde plane de pulsation ω est $\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \vec{0}$

Dans un milieu d'indice n , il suffit de remplacer c par $\frac{c}{n} \rightarrow \Delta \vec{E} + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \vec{E} = \vec{0}$

Donc $\Delta \vec{E} + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \vec{E} = \vec{0}$ dans milieu d'indice n
 $\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \vec{0}$ si $n=1$ (vide)

C4) Analogie Schrödinger / o.e.m.

o.e.m.	Schrödinger
$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \vec{0}$ (si $n=1$)	$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = E_i \psi$
$\Delta \vec{E} + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \vec{E} = \vec{0}$	$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + W \psi = E_i \psi$

Rq : $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \Delta \psi$ (ψ indépendant de y)

$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \vec{0} \leftrightarrow \Delta \psi + \frac{2m E_i}{\hbar^2} \psi = 0$
 (1)

De même, quand $n \neq 1$, $\frac{n^2 \omega^2}{c^2} \leftrightarrow \frac{2m}{\hbar^2} (E_i - W)$

ou encore $\frac{n^2 \omega^2}{c^2} \leftrightarrow \frac{2m E_i}{\hbar^2} \left(1 - \frac{W}{E_i} \right)$
 (2)

La comparaison de (1) et (2) conduit donc à :
 (par division membre à membre)

$n^2 = 1 - \frac{W}{E_i}$ W lu en B1

d'où $n^2 = 1 + \frac{V_0}{2E_i} - \frac{V_0 \cos k_L(x - x_n)}{2E_i}$

L'énance suggère $V_0 \ll E_i$ d'où d.p :

$n \approx 1 + \frac{V_0}{4E_i} - \frac{V_0 \cos k_L(x - x_n)}{4E_i}$

On a bien affaire à un indice modulé périodiquement :

$\cos(k_L(x - x_n)) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}(x - x_n)\right)$ période λ_n

donc $\Lambda = \lambda_n$ mais comme $k_L = 2k_L$ (cf B2)

alors $\lambda_n = \frac{\lambda_L}{2}$ donc $\Lambda = \frac{\lambda_L}{2} = \frac{671}{2} = 335,5 \text{ nm}$

L'amplitude de modulation s'affiche devant le cosinus : $n_1 = \frac{V_0}{4E_i}$

C5) Enoncé : $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 4hK \cosh(x-x_0) \psi$

Pour trouver cette expression à l'intérieur il faut partir de $-\frac{\hbar^2}{2m} (\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}) + W\psi = E_i \psi$
 sachant que $\hbar^2 = \frac{2mE_i}{k^2}$ puisque à l'extérieur $-\frac{\hbar^2}{2m} (\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}) = E_i \psi \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0$

Ainsi, à l'intérieur : $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = \frac{2mW}{\hbar^2} \psi$

ou encore $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = \frac{\hbar^2 W}{E_i} \psi$

Or $\frac{W}{E_i} = 1 - n^2 = \frac{V_0 \cosh(x-x_0)}{2E_i} - \frac{V_0}{2E_i}$

Je suis face à 1 terme en $\cosh$ par rapport à ce qu'il faut trouver.

Je ne peux pas le négliger, car il est du même ordre que le terme $\frac{V_0 \cosh(x-x_0)}{2E_i}$

Voici le résultat que je propose :

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 4hK [\cosh(x-x_0) - 1] \psi$

avec $\frac{\hbar^2 V_0}{2E_i} = 4hK$ Or $n_i = \frac{V_0}{4E_i}$ et $k_i = \frac{2\pi}{\lambda_{dB}}$

donc $K = \frac{k_i V_0}{8E_i} = \frac{n_i k_i}{2} = \frac{n_i \pi}{\lambda_{dB}}$

D1) Incident $\vec{k}_i$ avec $k_i = \frac{2\pi}{\lambda_{dB}}$ où $\lambda = 54 \mu m$

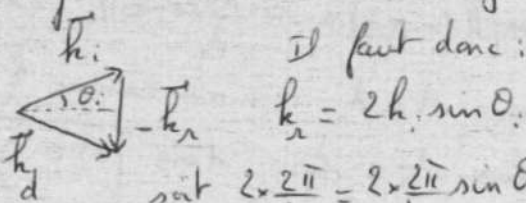
Diffraite $\vec{k}_d = \vec{k}_i - \vec{k}_n$ avec $k_n = 2k_i = 2 \times \frac{2\pi}{\lambda}$
 où $\lambda = 96 \mu m$

Enoncé : conservation énergie cinétique de l'atome, sachant que $E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

implique $\|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}_d\|$

Il faut donc réaliser une figure où $\vec{k}_d = \vec{k}_i - \vec{k}_n$ avec $\vec{k}_n \parallel \vec{z}_x$ et $k_d = k_i$

on arrive obligatoirement à un triangle isocèle :



Il faut donc :

$k_n = 2k_i \sin \theta$

soit $2 \times \frac{2\pi}{\lambda} = 2 \times \frac{2\pi}{\lambda_{dB}} \sin \theta$

$\lambda_{dB} = \lambda \sin \theta = 2\lambda \sin \theta$

D2) $\sin \theta_B = \sin \theta = \frac{\lambda_{dB}}{2\lambda} = \frac{\lambda_{dB}}{\lambda}$

$\sin \theta_B = \frac{54 \cdot 10^{-3}}{670} = 8 \cdot 10^{-5} \ll 1$

On peut assimiler $\sin \theta$ à l'angle :

$\theta_B = 8 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$ schéma : cf D1)

D4) a) $\beta_i e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$: onde incidente (non plane)
 $\beta_d e^{i\vec{k}_d \cdot \vec{r}}$: onde diffractée (")

D5) Si $z=0$ est l'entrée du réseau lumineux l'onde diffractée n'existe pas à l'entrée. β_0 est l'amplitude de l'onde incidente

D6) " β lentement variable sur λ_{dB} "
 Soit à l'échelle caractéristique des variations de β , cela signifie $a \gg \lambda_{dB}$ (comme en modulation d'amplitude où l'amplitude varie avec $f_m \ll f_p$)

ainsi $\frac{d^2 \beta}{dz^2} \sim \frac{\beta}{a^2}$ $k_{iz} \frac{d\beta}{dz} \sim \beta k_{iz} \sim \beta \frac{2\pi}{\lambda_{dB}}$

($k_{iz} \sim k_i$ car $\theta \ll 1 \rightarrow \vec{k}_i \rightarrow \vec{z}$)

donc $\frac{d^2 \beta}{dz^2} \sim \frac{\beta}{a^2} \sim \frac{\lambda_{dB}}{a} \ll 1$ OK

D7) En négligeant $\frac{d^2 \beta}{dz^2}$ on obtient alors :

$2ik_{iz} \frac{d\beta_i}{dz} = \beta_d 2k_i K e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}_n}$ (1)

$2ik_{iz} \frac{d\beta_d}{dz} = \beta_i 2k_i K e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}_n}$ (2)

Faire $\frac{d(1)}{dz}$ puis utiliser $\frac{d\beta_d}{dz}$ de (2)

$\rightarrow 2ik_{iz} \frac{d^2 \beta_i}{dz^2} = 2k_i K e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}_n} \frac{d\beta_d}{dz}$
 $= 2k_i K e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{r}_n} \frac{2k_i K e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}_n}}{2ik_{iz}} \beta_i$

$\rightarrow -k_{iz}^2 \frac{d^2 \beta_i}{dz^2} = k_i^2 K^2 \beta_i$

Comme $k_{iz} = k_i \cos \theta \rightarrow \frac{d^2 \beta_i}{dz^2} + \frac{K^2}{\cos^2 \theta} \beta_i = 0$

on a bien $\frac{d^2 \beta_i}{dz^2} + v^2 \beta_i = 0$ avec $v = \frac{K}{\cos \theta}$

Il en est de même pour β_d .

D8) $\frac{d^2 \beta}{dz^2} + v^2 \beta = 0 \rightarrow \begin{cases} \beta_i = A_i \cos v z + C_i \sin v z \\ \beta_d = A_d \cos v z + C_d \sin v z \end{cases}$ (3)

C.L. pour β_i : $[A_i = \beta_0] \Rightarrow \beta_i = \beta_0 \cos v z + C_i \sin v z$; $\frac{d\beta_i}{dz} = -\beta_0 v \sin v z + C_i v \cos v z$

pour β_d : $[A_d = 0] \Rightarrow \beta_d = C_d \sin v z \Rightarrow \frac{d\beta_d}{dz} = C_d v \cos v z$

Reprenons (1) : $2i\hbar_{i,z} \frac{d\beta_i}{dz} = \beta_d 2\hbar_i K e^{-i\hbar_i x_n}$; appliqué en $z=0$: $2i\hbar_{i,z} C_i v = 0$

$\Rightarrow [C_i = 0] \Rightarrow \boxed{\beta_i = \beta_0 \cos v z}$

D9) De même, reprenons (2) : $2i\hbar_{i,z} \left(\frac{d\beta_d}{dz} \right)_{z=0} = \beta_i(z=0) 2\hbar_i K e^{i\hbar_i x_n}$

$\Rightarrow 2i\hbar_{i,z} C_d v = 2\hbar_i K e^{i\hbar_i x_n} \beta_0 \Rightarrow C_d = \frac{\hbar_i K e^{i\hbar_i x_n}}{i\hbar_{i,z} v} \beta_0$

Or $\frac{\hbar_i}{\hbar_{i,z}} = (\cos \theta)^{-1}$ et $\frac{K}{\cos \theta} = v$ donc $\boxed{C_d = \frac{e^{i\hbar_i x_n}}{i} \beta_0}$

d'où $\boxed{\beta_d = -i e^{i\hbar_i x_n} \beta_0 \sin v z}$

Lentement variable si $v \ll$ fréquence de $\hbar_i$, c-à-d si $v \ll \frac{1}{\lambda_{dB}}$

Or $v = \frac{K}{\cos \theta} \sim K$ car $\theta \ll 1$ et $K = \frac{n_1 \pi}{\lambda_{dB}}$ et $n_1 = \frac{V_0}{4E_i}$ et $V_0 \ll E_i$

A t'on avec tout ça $v \lambda_{dB} \ll 1$?

$v \lambda_{dB} \approx \frac{V_0}{4E_i} \frac{\pi}{\lambda_{dB}} \cdot \lambda_{dB} \approx \frac{V_0}{E_i} \ll 1$ OK l'approximation des amplitudes lentement variable est justifiée

Conclusion :

Tout de même plutôt étonnant. D'habitude on parle des interférences créées par des photons (onde lumineuse) passant à travers un réseau grave matériellement et dans ce sujet c'est l'inverse, il s'agit d'interférences créées par de la matière passant à travers un réseau lumineux !