

THERMODYNAMIQUE

Ce problème a pour objectif l'étude du système liquide-vapeur de l'eau et son utilisation dans le circuit secondaire des centrales nucléaires.

ETUDE DU SYSTEME LIQUIDE-VAPEUR

L'équilibre entre l'eau liquide et sa vapeur est caractérisé, à différentes températures, par les données suivantes :

θ °C	p_s bar	Liquide saturant		Vapeur saturante	
		v_L m ³ .kg ⁻¹	h_L kJ. kg ⁻¹	v_G m ³ . kg ⁻¹	h_G kJ. kg ⁻¹
35	0,056	$1,00 \cdot 10^{-3}$	146,34	25,24	2560,67
50	0,123	$1,01 \cdot 10^{-3}$	208,96	12,04	2587,42
100	1,013	$1,04 \cdot 10^{-3}$	418,42	1,673	2671,44
185	11,238	$1,13 \cdot 10^{-3}$	784,17	0,174	2778,03
285	69,200	$1,35 \cdot 10^{-3}$	1261,11	0,028	2768,83

θ : température en degré Celsius

p_s : pression de vapeur saturante

v_L : volume massique du liquide saturant

h_L : enthalpie massique du liquide saturant

v_G : volume massique de la vapeur saturante

h_G : enthalpie massique de la vapeur saturante

A. Diagramme de Clapeyron (p,v) du système liquide-vapeur de l'eau

On désigne par p la pression du système liquide-vapeur et par v son volume massique.

A-I. Représenter l'allure du diagramme de Clapeyron (p,v) de l'eau.

On prendra soin de préciser la position du point critique C , les domaines liquide (L), liquide + vapeur (L+V), et vapeur (V).

A-II. Représenter, sur le diagramme précédent :

A-II.1 L'allure de l'isotherme critique T_C et préciser ses caractéristiques.

A-II.2 L'allure d'une isotherme $T < T_C$ et justifier la présence d'un palier sur cette isotherme.

A-III. On rappelle que le titre massique en vapeur x d'un système liquide-vapeur est égal au rapport entre la masse m_G d'eau à l'état de vapeur saturante et la masse totale m du système. On désigne, respectivement par : v_m et h_m , le volume massique et l'enthalpie massique du système liquide-vapeur.

Montrer que le titre massique en vapeur x est donné par l'une quelconque des relations ci-dessous :

$$x = (v_m - v_L)/(v_G - v_L) ; \quad x = (h_m - h_L)/(h_G - h_L)$$

A-IV. On désigne par $l_v(T)$ la chaleur latente massique de vaporisation à la température T . Rappeler la relation reliant $l_v(T)$ à $h_G(T)$ et $h_L(T)$.

B. Détente adiabatique réversible d'un système liquide-vapeur

On dispose d'un cylindre indéformable muni d'un piston. Le cylindre et le piston ont des parois calorifugées.

L'entropie massique d'un système liquide-vapeur, de titre massique en vapeur x , en équilibre à la température T est donnée par la relation : $s(x, T) = c_L \ln T + l_v(T)x/T + \text{cste}$, dans laquelle c_L désigne la capacité thermique massique du liquide saturant.

Le piston est, initialement, fixé dans une position qui délimite un volume $V = 10$ litres dans le cylindre.

L'introduction d'une masse $m = 10$ g d'eau dans le cylindre permet d'obtenir un système liquide-vapeur en équilibre à la température $\theta = 100$ °C.

B-I. Calculer le titre massique en vapeur x de ce système.

B-II. On fait subir au système liquide-vapeur défini ci-dessus une détente adiabatique réversible de la température θ à la température $\theta' = 50$ °C.

Sachant que c_L reste constante au cours de cette détente et égale à $4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, calculer le titre massique en vapeur x' du système liquide-vapeur à la fin de la détente.

B-III. Quel titre massique en vapeur x'' aurait-on dû avoir, à la température $\theta = 100$ °C, pour qu'au cours de la détente définie ci-dessus (**B-II.**) ce titre reste constant ?

Dans la suite du problème tous les calculs se rapporteront à une masse $m = 1$ kg de fluide.

La capacité thermique massique c_L du liquide est constante et vaut $4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Le coefficient de dilatation isobare α de l'eau liquide, supposé constant, vaut $1,5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

C. Modèle de fonctionnement d'une turbine à vapeur. Cycle de Rankine

Le circuit secondaire d'une centrale nucléaire comporte les éléments suivants : un générateur de vapeur, une turbine, un condenseur et une pompe d'alimentation (figure).

Les transformations subies par l'eau dans ce circuit sont modélisées par le cycle de Rankine décrit ci-dessous.

- A→B : compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression $p_1 = 0,056$ bar à la pression $p_2 = 69,200$ bar, du liquide saturant sortant du condenseur à la pression p_1 (état A).
Cette compression entraîne une élévation ΔT de la température du liquide.
- B→D : échauffement isobare du liquide dans le générateur de vapeur qui amène le liquide de l'état B à l'état de liquide saturant sous la pression p_2 (état D).
- D→E : vaporisation totale, dans le générateur de vapeur, sous la pression p_2 .
- E→F : détente adiabatique réversible, dans la turbine, de p_2 à p_1 .
- F→A : liquéfaction totale, dans le condenseur, sous la pression p_1 , de la vapeur présente dans l'état F.

C-I. Représenter le cycle décrit par l'eau dans le diagramme de Clapeyron (p, v).

C-II. La différentielle de l'entropie massique du liquide s'écrit, en fonction des variables T et p :

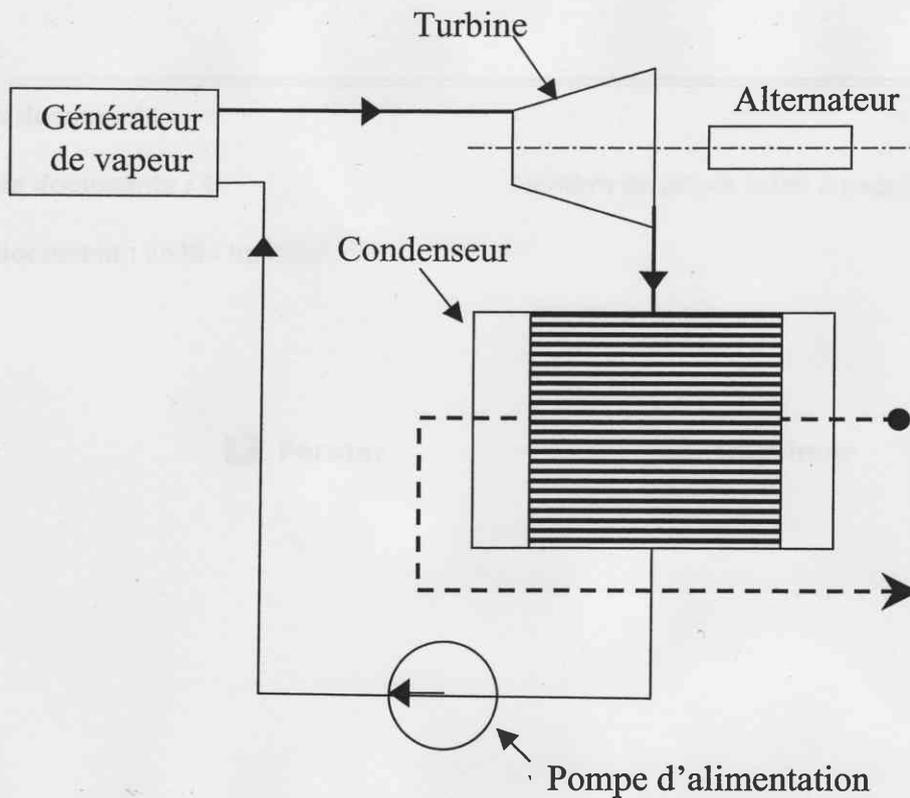
$$ds = c_L \frac{dT}{T} - \alpha v_L dp.$$

On note $\Delta T = T - T_1$ l'élévation de la température du liquide dans la pompe d'alimentation. Sachant que $\Delta T \ll T_1$, calculer ΔT .

On supposera, pour ce calcul, que le liquide est incompressible et que son volume massique v_L vaut $10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.

Dans la suite du problème on négligera ΔT .

- C-III.** Calculer le titre x_F et l'enthalpie massique h_{mF} du système liquide-vapeur sortant de la turbine (état F).
- C-IV.** Calculer les quantités d'énergie Q_1 et Q_2 reçues par 1 kg d'eau, par transfert thermique, respectivement, dans le condenseur et dans le générateur de vapeur.
- C-V.** Calculer le travail W reçu, par 1 kg de fluide, au cours du cycle.
- C-VI.** Calculer l'efficacité ρ (ou rendement thermodynamique) du cycle. Comparer cette efficacité à celle ρ_C d'un cycle de Carnot décrit entre les mêmes températures extrêmes T_1 et T_2 .
- C-VII.** Calculer la variation d'enthalpie Δh_{AB} du liquide au cours de la compression AB.
On supposera, pour ce calcul, que le liquide est incompressible et que son volume massique v_L vaut $10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.
- C-VIII.** Dans le calcul du bilan enthalpique du fluide au cours du cycle, on peut négliger la variation d'enthalpie Δh_{AB} . Montrer, alors, que le travail W peut s'exprimer en fonction des enthalpies massiques du fluide à l'entrée et à la sortie de la turbine.

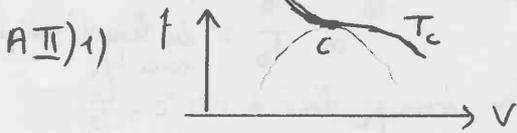
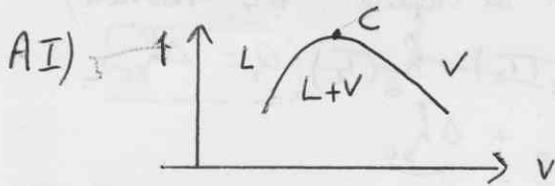


A propos de la formule que donne le sujet en B
 soit un état initial 1 à (f_1, T_1, x_1) un état final 2 à (f_2, T_2, x_2)
 On va de 1 à 2 par la succession des 3 étapes suivantes:
 (x_1 vapeur à T_1) \xrightarrow{P} tout liquide à T_1 \xrightarrow{Q} tout liquide à T_2 $\xrightarrow{A_2}$ x_2 vapeur à T_2

d'où $\Delta S_{A_1, A_2} = \Delta S_{A_1, P} + \Delta S_{P, Q} + \Delta S_{Q, A_2} = -x_1 \frac{h_v(T_1)}{T_1} + c_L \ln \frac{T_2}{T_1} + x_2 \frac{h_v(T_2)}{T_2}$

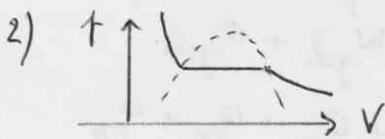
On comprend alors la relation donnée en 1 point $\Delta(x, T) = c_L \ln T + x \frac{h_v(T)}{T} + \text{cte}$

A propos de la formule donnée en CII $ds = c_L \frac{dT}{T} - \alpha v_L^2 df$; elle est plus rigoureuse que celle qu'on adopte usuellement pour les phases condensées à savoir $ds = c_L \frac{dT}{T}$ (α est en fait très très petit)



en C l'isotherme présente une tangente horizontale et C est un point d'inflexion.

soit $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T_c} = 0$ $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{T_c} = 0$



passer dans la zone de mélange L+V lors d'un changement d'état à T, la pression est fixée (syst. monovariant)

A III) $m v_m = m_G v_G + m_L v_L$
 $m v_m = x m v_G + (1-x) m v_L$

d'où $x = \frac{v_m - v_L}{v_G - v_L}$

De m pour l'enthalpie $x = \frac{h_m - h_L}{h_G - h_L}$

A IV) $l_v(T) = h_G(T) - h_L(T)$

B. I) on a un mélange d'eau liquide-vapeur à 100°C ; donc la pression est la pression de vapeur saturante soit 1,013 bar (lu dans le tableau)

En négligeant le volume d'eau liq par rapport à celui d'eau vapeur, on peut dire que l'eau vapeur occupe V=10 litres.
 loi du GP : $p_s V = \frac{m_v R T}{M}$

d'où $m_v = \frac{p_s V M}{R T} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot (100+273)} = 5,88 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$

Ainsi le titre massique en vapeur est $x = \frac{m_v}{m} = \frac{5,88}{10} = 58,8 \%$

B. II) Apparemment on obtient encore un syst. liq. vap. ; on peut donc utiliser la formule donnée sur s(x,T) à savoir $s(x,T) = c_L \ln T + l_v(T) \frac{x}{T} + ct$ pour le début (x,T) et la fin (x',T')

La transformation est adiabatique réversible par hypothèse donc $s'(x',T') = s(x,T)$
 c'ad $c_L \ln \frac{T'}{T} + l_v(T) \frac{x'}{T} - l_v(T) \frac{x}{T} = 0$

$x' = \frac{T'}{l_v(T)} \left(l_v(T) \frac{x}{T} - c_L \ln \frac{T'}{T} \right)$

AN: on obtient l_v à partir de $h_G - h_L$
 ainsi $l_v(100^\circ\text{C}) = h_G(100) - h_L(100) = 2671,44 - 418,32 = 2253,02 \text{ kJ.kg}^{-1}$
 $l_v(50^\circ\text{C}) = 2587,42 - 208,96 = 2378,46 \text{ kJ.kg}^{-1}$

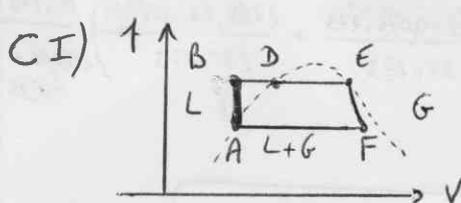
$x' = \frac{273+50}{2378,46 \cdot 10^3} \left(\frac{2253,02 \cdot 58,8 \cdot 10^3}{100} - 4,18 \cdot 10^3 \ln \frac{273+50}{373} \right)$
 $x' = 0,56$

B. III) on souhaite le même titre à la fin qu'au début. Soit x'' ce titre ; alors :

$x'' = \frac{T'}{l_v(T')} \left(l_v(T) \frac{x''}{T} - c_L \ln \frac{T'}{T} \right)$

$x'' = \frac{\frac{T'}{l_v(T')} c_L \ln \frac{T'}{T}}{\frac{l_v(T) T'}{l_v(T') T} - 1} = \frac{c_L \ln \frac{T'}{T}}{\frac{l_v(T)}{T} - \frac{l_v(T')}{T'}}$

AN $x'' = \frac{4,18 \ln \frac{273+50}{373}}{\frac{2253,02}{373} - \frac{2378,46}{273+50}} = 0,45$



F est entre les courbes de saturation, c'ad correspond à un mélange (L+V), étant donné la question C. III

C. II) AB : pompe d'alimentation : adiab. rév. donc $\Delta S_{AB} = 0$

or $ds = c_L \frac{dT}{T} - \alpha v_L dp$
 avec c_L et v_L constants par hypothèse (Incompressible signifie v_L constant)

$$\Delta S_{AB} = c_L \ln \frac{T_2}{T_1} - \alpha v_L (p_2 - p_1)$$

$$0 = c_L \ln \frac{T_1 + \Delta T}{T_1} - \alpha v_L (p_2 - p_1)$$

avec $\Delta T \ll T_1$, on a $\ln \frac{T_1 + \Delta T}{T_1} = \ln \left(1 + \frac{\Delta T}{T_1}\right) \approx \frac{\Delta T}{T_1}$

d'où $\Delta T = \frac{T_1 \alpha v_L (p_2 - p_1)}{c_L}$

AN: $\Delta T = \frac{273 + 35}{4,18 \times 10^3} \times 1,5 \cdot 10^{-4} \times 10^{-3} (69,2 - 0,056) 10^5$

$\Delta T = 0,076 \text{ K}$ on vérifie $\Delta T \ll T_1$

on lit T_1 dans le tableau de valeurs car A est un point de liquide saturant à $p_1 = 0,056 \text{ bar}$

CIII EF est adiabatique réversible donc $\Delta S_{EF} = 0$

E est totalement vapeur

F est partiellement vapeur: x_F est le titre en vapeur

Pour un mélange liq. vap. on va utiliser la formule donnée en B à savoir

$$s = c_L \ln T + \frac{p_v(T) x}{T} + cte$$

Appliquée en E ($x=1, T_2$) elle donne

$$s_E = c_L \ln T_E + \frac{p_v(T_E)}{T_E} + cte$$

Appliquée en F (x_F, T_1) elle donne

$$s_F = c_L \ln T_1 + \frac{p_v(T_1) x_F}{T_1} + cte$$

$s_F = s_E$ d'où $x_F = \left(c_L \ln \frac{T_E}{T_1} + \frac{p_v(T_E)}{T_E} \right) \frac{T_1}{p_v(T_1)}$

AN $x_F = \left(4,18 \ln \frac{285 + 273}{35 + 273} + \frac{2768,83 - 1269,11}{285 + 273} \right) \frac{35 + 273}{2569,67 - 146,34}$

$x_F = 0,66$

$h_{mF} = x_F h_g(T_F) + (1 - x_F) h_l(T_F)$
 $= 0,66 \times 2569,67 + (1 - 0,66) \times 146,34$

$h_{mF} = 1744 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

CIV $Q_1 = h_l(A) - h_{mF} = 146,34 - 1744$
 (isobare) $\Delta h_{FA} \quad Q_1 = -1597 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

Générateur de vapeur: BE (isobare) ②

$Q_2 = \Delta h_{BE}$

$Q_2 = \Delta h_{BD} + \Delta h_{DE}$

liquide qui s'échauffe de $T_B = T_1 + \Delta T \approx T_1$ à T_D ° du liquide saturé sous p_2
 vaporisation sous p_2 donc à $285^\circ \text{C} = T_D$

$Q_2 = c_L (T_D - T_1) + h_g(T_D) - h_l(T_D)$

$Q_2 = 4,18 \cdot 10^3 (285 - 35) + (2768,83 - 1269,11) 10^3$

$Q_2 = 2553 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

CV 1^{er} principe pendant le cycle

$\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = W_{\text{cycle}} + Q_{\text{cycle}}$

avec $Q_{\text{cycle}} = Q_{AB} + Q_{BE} + Q_{EF} + Q_{FA}$
 $= Q_1 + Q_2$

donc $W_{\text{cycle}} = -Q_1 - Q_2 = 1597 - 2553 = -956 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

on a bien $W_{\text{cycle}} < 0$ qui correspond à un moteur.

CVI $\rho = \frac{|W_{\text{cycle}}|}{Q_2} = \frac{956}{2553} = 37\%$

$\rho_c = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{35 + 273}{285 + 273} = 45\%$

on a $\rho < \rho_c$

CVII $dh = T ds + v dp = v dp$ (AB adiab. liquide)

$\Delta h_{AB} = (p_2 - p_1) v_L = (69,2 - 0,056) 10^5 \cdot 10^{-3}$
 $\Delta h_{AB} = 6914 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$

CVIII $\Delta h_{AA} = \Delta h_{AB} + \Delta h_{BE} + \Delta h_{EF} + \Delta h_{FA} = 0$

$W_{\text{cycle}} = -Q_1 - Q_2 = -\Delta h_{FA} - \Delta h_{BE}$

donc $W_{\text{cycle}} = \Delta h_{AB} + \Delta h_{\text{turbine}} \approx \Delta h_{\text{turbine}}$